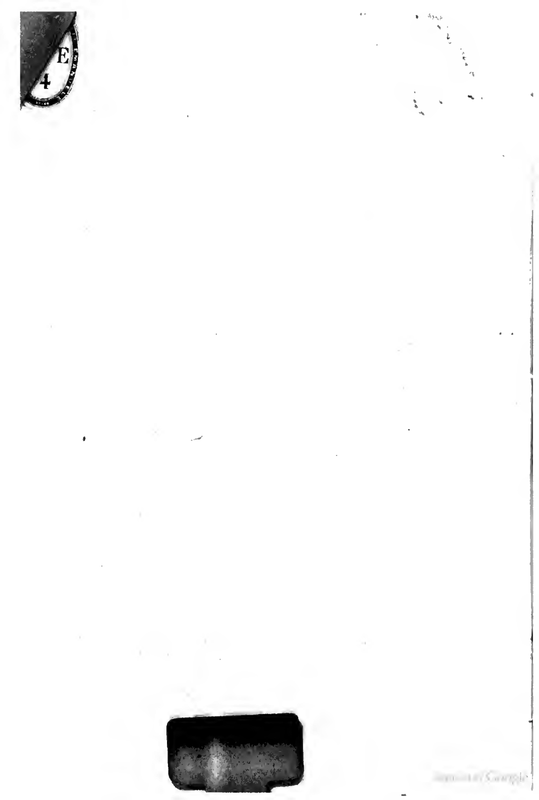
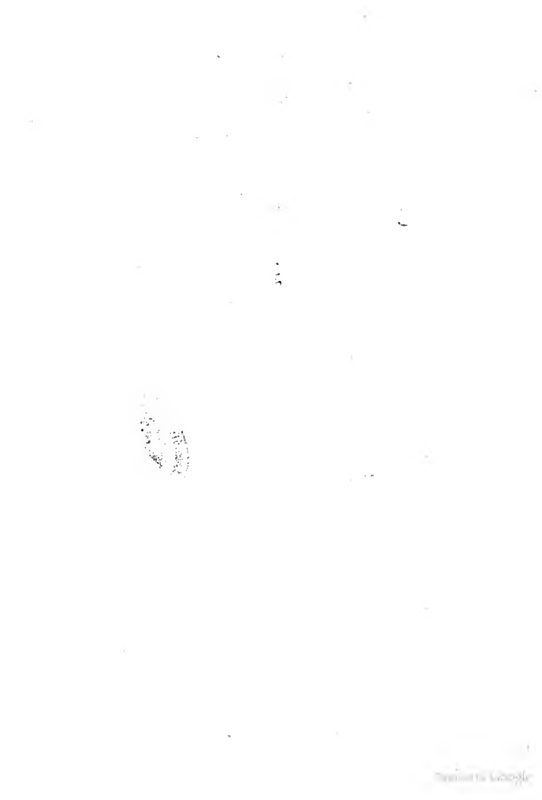






PRINCIPII

DI

ASTRONOMIA

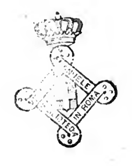
COMPILATI

per uso delle scuole del Collegio Romano

DAL

P. A. SECCHI D.C.D.G.





IHS

ROMA

1862

INDICE



PRINCIPII DI ASTRONOMIA

PARTE PRIMA

DEL MOTO APPARENTE DE' CORPI CELESTI

CAPO I.

Definizioni de' circoli della sfera

Il *cielo si presenta all'osservatore come una immensa volta emisferica, il cui centro e' nell'occhio dell'osservatore. Il limite degli oggetti terrestri su cui sembra posare la sfera dicesi o-*rizzonte apparente. *Una retta verticale e perpendicolare all'orizzonte prolungata indefinitamente fino alla sfera celeste segnerà in essa due punti: lo* zenit *al vertice e il* nadir *al basso, i quali diconsi* poli *dell'orizzonte. Un circolo massimo geometrico della sfera, i cui punti distino* 90° *dallo zenit, è l'orizzonte* razionale.

Questa sfera nulla ha certamente di reale, ma la sua considerazione aiuta facilmente a intendere le leggi dei moti apparenti, e perciò ne faremo uso. Considerando l'aspetto del cielo stellato nelle notti serene, non si tarda gran fatto a riconoscere, che tutte le stelle girano in circoli apparenti paralleli tra di loro, il cui piano e' inclinato a quello dell'orizzonte, e la loro grandezza va diminuendo verso la parte di settentrione, talmente che in certo luogo riduconsi ad un punto, che sembra immobile in cielo. Questo punto dicesi polo della sfera celeste ed e' alto in Roma 41° 53' 54" *sopra*

l'orizzonte, e sta presso la stella α dell'orsa minore. La retta condotta a questo punto dall'occhio dell'osservatore, e prolungata fino al punto inferiore diametralmente opposto dicesi **asse del mondo**. Il polo a noi visibile dicesi **artico**, l'altro **antartico**.

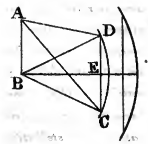
Un piano che passi pel centro della sfera perpendicolare all'asse del mondo taglia la sfera in un circolo massimo, che è l'**equatore** celeste. Questo è il solo circolo, che nelle regioni come le nostre, ove la sfera è **obliqua**, sia tagliato in due parti eguali dall'orizzonte; gli altri circoli minori paralleli ad esso sono divisi in parti ineguali, e dalla parte del settentrione la maggiore sta sopra l'orizzonte, e la minore sotto, e viceversa dalla parte del mezzodì. Quei circoli minori, che hanno raggio **minore dell'altezza del polo** sono tutti sopra l'orizzonte, e le stelle che li descrivono non tramontano mai.

Non tutti gli astri sono fissi relativamente gli uni agli altri sulla sfera celeste come le stelle, ma alcuni sono dotati di movimento: il sole, la luna e altri minori corpi detti perciò pianeti si muovono continuamente di moto proprio oltre il diurno, del quale studieremo altrove le leggi. Il sole con tal moto si trova descrivere in un anno un circolo massimo **obliquo** all'equatore, e ad esso inclinato di 23° 27', che dicesi **eclittica**. Questo circolo taglia l'equatore in due punti, che diconsi **punti equinoziali**: uno è quello di **ariete**, ove il sole è sul principio di primavera, l'altro di **libra**, ove sta nel principio di autunno.

Per fissare la posizione apparente di un corpo celeste qualunque, gli astronomi si servono di alcuni sistemi di circoli e di **coordinate**, che sono diverse secondo il **piano fondamentale** a cui si riferisce l'oggetto. Il primo sistema ha

per piano fondamentale l'orizzonte, e per punto di partenza il meridiano. Il meridiano è un circolo massimo che passa per lo zenit di ciascun osservatore e pel polo della sfera celeste: e la intersezione del piano di questo circolo col piano dell'orizzonte dicesi linea meridiana. Per fissare la posizione di un astro rapporto all'orizzonte si imagina condotto un piano pel zenit e per l'astro, e l'angolo che il raggio visuale condotto all'astro fa in questo piano coll'orizzonte, dicesi altezza: l'angolo poi che il piano del circolo verticale fa col meridiano chiamasi azimut. L'altezza e l'azimut fissano la posizione dell'astro. L'altezza è contata da 0° a + 90° sopra l'orizzonte, cioè fino allo zenit, e da 0° a − 90° sotto di esso, verso il nadir. Invece dell'altezza talora si usa il suo complemento, che è la distanza zenitale, e contasi dallo zenit 0° fino al nadir 180°. Gli azimut si contano da mezzodì verso ponente fino a 360°.

La linea meridiana si trova a questo modo. Fissato uno stilo verticale AB perpendicolare a un piano ben orizzontale, qualche ora prima del mezzodì si osservi la lunghezza dell'ombra BC, e si noti il punto C. Fatto centro al punto B piede dello stilo, col raggio BC si descriva un circolo CD, e si aspetti dopo il mezzodì finchè l'ombra arrivi a toccare questo circolo, e si noti il punto p. e. D: si congiunga DC e si divida in mezzo la corda in E; tirata la retta BE, questa sarà la meridiana. Per averla con più esattezza, sarà bene fare più punti la mattina e tracciare parecchi circoli; e fatte più costruzioni simili prende



re la media de' punti vicini ad **E**. *Un piano che passi per la verticale ed è perpendicolare al meridiano dicesi* **primo verticale.**

Il secondo sistema di circoli ha per piano fondamentale l'equatore. Per fissare la posizione di un astro rapporto a questo, si conduce pel polo della sfera e per l'astro un circolo massimo, che sarà perpendicolare all'equatore: questo dicesi **circolo di declinazione**, *e la distanza dell'astro all'equatore in gradi contata su questo circolo è la* **declinazione dell'astro**, *che è* $+$ *dalla parte superiore dell'equatore, cioè verso settentrione, e* $-$ *dalla inferiore, cioè verso austro. L'altra coordinata è presa sull'equatore stesso e dicesi* **ascensione retta**, *ed è* **la distanza del punto di ariete al punto ove il circolo di declinazione taglia l'equatore**, *contandola secondo l'andamento con cui passano i punti successivi della sfera celeste pel meridiano, cioè verso oriente da ariete* 0° *fino a* 360°. *Talora si prende solamente sull'equatore la distanza del circolo di declinazione condotto per l'astro al meridiano, e allora dicesi* **angolo orario**, *perchè quest'arco è la misura dell'angolo che fanno al polo i due piani del meridiano e del circolo di declinazione, che in questo caso dicesi* **circolo orario.**

Il terzo sistema è relativo alla eclittica, ossia al piano dell'orbita annua apparente del sole. Per determinare la posizione di un astro rapporto a questo circolo, si concepisca partire dal centro della sfera una retta perpendicolare al piano dell'eclittica, che è il suo asse, e che sarà perpendicolare alla linea degli equinozî: il punto, ove quest'asse incontra la sfera celeste, è il polo dell'eclittica, che ora trovasi nella costellazione del dragone non molto lungi dalla stella α.

Un circolo massimo condotto per l'asse dell'eclittica e per l'astro dicesi **circolo di latitudine**, *e chiamasi* **latitudine** *dell'a-*

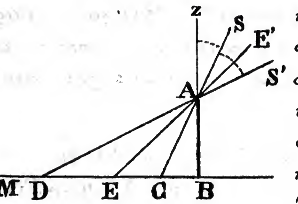
stro la distanza di esso al piano dell' eclittica contata su questo circolo. L'altra coordinata dicesi longitudine*, ed è la distanza del punto di ariete al luogo, ove il circolo di latitudine taglia l' eclittica, contata in gradi da 0° a 360° sull' eclittica stessa cominciando dal punto di ariete. Anticamente l' eclittica si divideva in 12 parti eguali chiamate* segni*, i cui nomi sono nei seguenti versetti*

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Anphora, Pisces.

Ciascun segno occupava 30°, e i loro nomi vengono dalle costellazioni ad essi una volta corrispondenti: le costellazioni però sono molto ineguali tra di loro di spazio, e ora non corrispondono più (come vedremo a suo luogo) ai segni suddetti. Una zona di cielo, che si estende 8° da una parte e dall' altra dell' eclittica, forma ciò che dicesi zodiaco *e che è lo spazio in cui si vedono i pianeti noti agli antichi.*

Non si deve confondere la latitudine *e* longitudine *celeste che è presa rapporto alla ecclittica, colla* latitudine *e* longitudine geografica *che sono fissate rapporto alla superficie terrestre. Se si concepisca il centro della sfera celeste trasportato nel centro della terra, (che è prossimamente sferica) il piano dell' equatore celeste taglierà il globo in un circolo, che è l'* equatore terrestre*, e il piano del meridiano lo taglierà in una curva prossimamente circolare, che è il meridiano terrestre. La* latitudine geografica *è la distanza della verticale di un luogo della terra dall' equatore celeste, e la* longitudine geografica *è l' angolo che il meridiano di un luogo determinato fa col meridiano di un altro luogo chiamato* primo*, e che è arbitrario e di convenzione.*

La posizione dell'equatore celeste e l'obliquità dell'eclittica si trovano facilmente mediante l'osservazione della massima altezza del sole nell'estate e della minima nell'inverno, nelle quali epoche il sole dicesi stare nei solstizî del cancro e del capricorno. Sia AB uno stile o gnomone verticale, che prolungato alla sfera celeste segnerà lo zenit z. Tracciata la meridiana BM, si misuri la minima ombra dello stile BC quando il sole sta nel solstizio estivo, e si avrà l'angolo CAB dalla equazione



$$\tan g\, CAB = \frac{CB}{AB}\ ;$$

similmente nel solstizio d'inverno si avrà l'angolo DAB da

$$\tan g\, DAB = \frac{DB}{AB}\ .$$

Conosciuti questi due angoli, poichè l'equatore divide in mezzo l'angolo $DAC = SAS'$, sarà

$$\text{la latitudine} = zAE' = EAB = \frac{DAB + CAB}{2} = L\ ,$$

$$\text{l' obliquità} = E'AS = EAC = \frac{DAB - CAB}{2} = \omega\ .$$

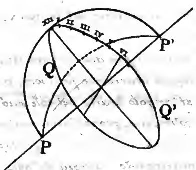
Diremo altrove come si determini sull'equatore il punto di ariete, che è il principio per contare le ascensioni rette e le longitudini.

CAPO II.

Della misura del tempo

UNA esatta misura del tempo è il fondamento di tutta l'Astronomia: essa si desume dalla rotazione della sfera celeste, che è uniforme.

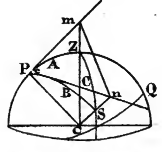
Sia PP' l'asse del mondo; QQ' l'equatore diviso in 24 parti uguali corrispondenti alle 24 ore in cui comunemente dividesi il giorno, e che ciascuna sarà di 15°: è chiaro che il moto di rotazione di tutta la sfera attorno il suo asse potrà misurarsi col moto di un punto preso sul suo equatore, e l'angolo fatto al polo dal meridiano col circolo di declinazione condotto per il punto suddetto sarà l'angolo orario, il quale verrà misurato dall'arco di equatore intercetto tra i due circoli medesimi. Onde il tempo potrà esprimersi in arco, e gli archi in tempo, essendo gli uni costantemente proporzionali all'altro. Gli astronomi fanno il principio del loro giorno, detto **siderale**, quando il punto di Ariete passa pel meridiano. Siccome il punto di ariete è invisibile, si fa uso delle stelle fisse, di cui si è determinata antecedentemente l'ascensione retta nel modo, che esporremo a suo luogo. Un orologio che segni 24 ore nel tempo che uno stesso punto della sfera (in pratica, una stella fissa) impiega a ritornare al meridiano, dicesi **andare a tempo siderale**. Negli usi comuni però per misura del tempo si adopera il sole, ma sic.



come questo, oltre il moto diurno della sfera ha un moto suo proprio che non è uniforme, così comparando i passaggi del sole e di una stella fissa al meridiano, si troverà 1.° *che la stella passa quasi* 4ᵐ *più presto ogni giorno :* 2.° *che la differenza della stella col sole da un giorno all' altro non è costante, ma variabile nelle varie stagioni dell' anno. Ne segue da ciò che un orologio esatto non può andare col sole; ma ora ritarda, ora anticipa: gli astronomi hanno determinato accuratamente tali irregolarità, onde applicando cotali correzioni, possiamo avere il tempo solare uniforme, o, come dicono,* medio; *che serve a regolare gli orologi, mediante la determinazione del* tempo *vero, cioè il tempo che indica il sole.*

Alla cognizione adunque del tempo in un determinato istante, si richiede la cognizione dell' angolo orario, che fa il sole, o una stella di posizione nota. Quest 'angolo orario pel sole può determinarsi in modo assai semplice, ma grossolano, mediante un **orologio solare**; *(V. appendice in fine del capo) ma in pratica di scienza esatta si determina misurando l' altezza del sole sopra l' orizzonte, purchè si conosca la sua declinazione e la latitudine geografica.*

Sia **PZS** *il triangolo fatto in cielo dai tre circoli massimi; meridiano* **PZ**, *circolo orario* **PS**, *e verticale* **ZS**; *devesi determinare l' angolo orario* **ZPS**. *In questo triangolo si conoscono i tre lati: cioè* **ZS** = 90° – *altezza* = **C**; **PS** = 90° – *declinazione* δ = **B**; **PZ** = 90° – *latitudine* **L** = *colatitudine* = **A**; *e si cerca l' angolo* **SPZ** = **c**.



Pel polo **P** *della sfera si tirino le due tangenti* **Pm** *e* **Pn**

ai due archi A *e* B *; e dal centro pei punti* S *e* Z *le due secanti* Cm , Cn , *e si congiunga* mn : *sarà*

$$\overline{mn}^2 = \overline{Pm}^2 + \overline{Pn}^2 - 2Pm . Pn \cos nPm ,$$
$$\overline{mn}^2 = \overline{Cm}^2 + \overline{Cn}^2 - 2Cm . Cn \cos nCm ;$$

eguagliando i secondi membri, e sostituendo i valori trigonometrici, poichè il raggio è fattor comune, sarà

$$\text{tang}^2 A + \text{tang}^2 B - 2 \text{tg} A \, \text{tg} B \cos c = \sec^2 A + \sec^2 B - 2 \sec A \sec B \cos C :$$

avendosi $\sec^2 = 1 + \text{tang}^2$, *e* $\sec = \frac{1}{\cos}$, *l'equazione si riduce a*

$$\frac{2 \cos C}{\cos A \cos B} = 2 + 2 \, \text{tang} A \, \text{tang} B \cos c \; ;$$

donde

(a) $$\cos C = \cos A \cos B + \text{sen} A \, \text{sen} B \cos c \; ;$$

dalla quale si ha l'angolo orario c

(m) $$\cos c = \frac{\cos C - \cos A \cos B}{\text{sen} A \, \text{sen} B} .$$

Corollario I. *Siccome la figura e la dimostrazione è la stessa per tutti e tre i vertici del triangolo, così si potrà cavare rapporto agli altri due angoli*

(a) $$\begin{cases} \cos B = \cos A \cos C + \text{sen} A \, \text{sen} C \cos b , \\ \cos A = \cos B \cos C + \text{sen} B \, \text{sen} C \cos a . \end{cases}$$

Corollario II. *La formola* (m) *ci somministra*

$$\cos^2 c = \frac{1}{\text{sen}^2 A \, \text{sen}^2 B} \left(\cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C + \cos^2 A \cos^2 B \right) ;$$

ed essendo $1 - \cos^2 c = \text{sen}^2 c$, *sarà pure*

$$\text{sen}^2 c = \frac{1}{\text{sen}^2 A \, \text{sen}^2 B} \left(\text{sen}^2 A \, \text{sen}^2 B - \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C - \cos^2 A \cos^2 B \right) ,$$

ove mettendo $1 - \cos^2 A$ *per* $\text{sen}^2 A$, *e* $1 - \cos^2 B$ *per* $\text{sen}^2 B$, *sarà*

$$\frac{\text{sen}^2 c}{\text{sen}^2 C} = \frac{1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C}{\text{sen}^2 A \, \text{sen}^2 B \, \text{sen}^2 C} ;$$

dividendo i due membri per $sen^2 C$. *Il secondo membro è funzione costante de' tre lati, qualunque sia l'ordine con cui si prendono gli elementi del triangolo, e resterà perciò invariabile; onde, estraendo la radice, avremo*

$$\text{(b)} \qquad \frac{sen\,c}{sen\,C}=\frac{sen\,a}{sen\,A}=\frac{sen\,b}{sen\,B}=cost.$$

Le formole (b) *mostrano, che* in ogni triangolo sferico i seni dei lati sono come i seni degli angoli opposti.

Corollario III. *La terza formola* (a) *ci da*

$$\cos a=\frac{\cos A-\cos B\cos C}{sen\,B\,sen\,C},$$

e la (b) *ci da*

$$sen\,a=\frac{sen\,A\,sen\,b}{sen\,B};$$

donde dividendo

$$\cot a=\frac{\cos A-\cos B\cos C}{sen\,A\,sen\,C\,sen\,b};$$

ed eliminando da questa $\cos B$ *colla seconda delle equazioni* (a) *si avrà*

$$\cot a=\frac{1}{sen\,A\,sen\,C\,sen\,b}(\cos A-\cos A\cos^2 C-sen\,A\,sen\,C\cos C\cos b)$$

$$=\frac{1}{sen\,A\,sen\,C\,sen\,b}(\cos A\,sen^2 C-sen\,A\,sen\,C\cos C\cos b)$$

$$=\frac{1}{sen\,b}(\cot A\,sen\,C-\cos C\cos b),$$

e finalmente

$$\left.\begin{array}{l}\cot a\,sen\,b=\cot A\,sen\,C-\cos C\cos b,\\ \cot b\,sen\,a=\cot B\,sen\,C-\cos C\cos a.\end{array}\right\} \qquad \text{(c)}$$

e similmente

Corollario IV. *Se il triangolo sia rettangolo in* a, *avremo le seguenti equazioni dalle precedenti, fatto* $a=90°$:

$$\left.\begin{array}{lcl}\cos A=\cos B\cos C & ; & sen\,B=sen\,b\,sen\,A;\\ tang\,C=tang\,A\cos b & ; & tang\,B=tang\,b\,sen\,C.\end{array}\right\} \qquad \text{(d)}$$

Con queste formole si sciolgono tutti i triangoli sferici, salvo quel-

li, in cui sono dati solo i tre angoli; per i quali vedansi i trattati di trigonometria sferica.

Scolio. *La formola (m) non è commoda al calcolo logaritmico, ove si cercano fattori e divisori senza addizioni quanto più sia possibile: si rende tale a questo modo:*

$$2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}a = 1 - \cos a\ ;$$

sostituendo, sarà

$$2\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}a = 1 - \frac{\cos A - \cos B\cos C}{\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C} = \frac{1}{\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C}\left(\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C - \cos A + \cos B\cos C\right)$$

$$= \frac{1}{\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C}\left[\cos(B-C) - \cos A\right] = \frac{2\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(A+B-C)\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\text{sen}\,B\,\text{sen}\,C}\ ;$$

dunque sarà (cambiando la lettera al solito)

$$\text{sen}\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(C+B-A)\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(C+A-B)}{\text{sen}\,B\,\text{sen}\,A}}\ ;$$

e da $2\cos^2\tfrac{1}{2}c = 1 + \cos c$ *si avrà*

$$\cos\tfrac{1}{2}c = \sqrt{\frac{\text{sen}\tfrac{1}{2}(C+B+A)\,\text{sen}\tfrac{1}{2}(B+A-C)}{\text{sen}\,B\,\text{sen}\,A}}.$$

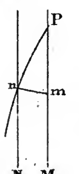
Osservazioni del Meridiano. — *Il tempo comunemente si determina negli osservatorî, e gli orologi si regolano mediante il passaggio degli astri al meridiano: lo strumento a ciò adoperato dicesi* strumento de' passaggi. *Esso consiste in un cannocchiale mobile attorno ad un asse orizzontale nel piano del meridiano; il suo oculare è fornito di un reticolo di fili fissi, a cui si prendono gli appulsi degli astri. Perchè questo strumento dia risultati esatti, si richiede 1.° che l'asse ottico dello strumento, (cioè la retta che unisce il centro dell'obbiettivo al centro del reticolo) sia normale all'asse di rivoluzione: un difetto in ciò dicesi errore di* collimazione, *e in tal caso lo strumento descri-*

verà un circolo minore della sfera.

2.° Che l'asse sia orizzontale, il che si ottiene col livello, e l'errore in ciò dicesi di **inclinazione**; per cui lo strumento descrive un circolo obliquo all'orizzonte, che ha comuni col meridiano solo i punti Sud e Nord.

3.° Che esso sia diretto nel piano del meridiano; e se ne devia, dicesi avere errore **azimutale**. Benchè non sia così collocato lo strumento, pure si potranno avere buoni risultati, se si correggano le osservazioni dall'influsso degli errori che trovasi avere.

1.° Per correggerlo dalla collimazione, sia PM il meridiano, ed Nn il circolo minore descritto dallo strumento; notasi il passaggio della stella quando arriva in n; ma essa allora non è nel meridiano, e manca l'arco mn, ossia la sfera celeste deve girare dell'angolo nPm $=$ h; e quest'angolo esprime la correzione da farsi al passaggio osservato, per avere il passaggio vero. Per trovarla, il triangolo nPm rettangolo in m dà



$$\operatorname{sen} mn = \operatorname{sen} Pn \operatorname{sen} mPn.$$

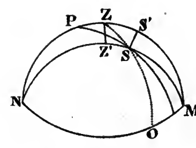
Chiamando c la collimazione, δ la declinazione della stella, 15θ l'angolo h espresso in tempo, si avrà

$$\operatorname{sen} c = \cos\delta \times \operatorname{sen} h = \cos\delta \operatorname{sen} 15\theta:$$

e siccome gli archi c e h sono piccolissimi, sarà la correzione in tempo

$$\theta = \frac{c}{15\cos\delta} = \frac{1}{15} c \sec\delta.$$

2.° Per l'errore di livello, sia MZP il meridiano; e lo strumento invece descriva l'arco NZ'M. La distanza de' due circoli massimi ZZ' sarà la misura dell'inclinazione dell'asse $=$ i: e l'astro passa in S allo strumento, mentre



passa in S' *al meridiano, e la correzione si avrà dall'angolo* SPS' = h'. *Per ciò il triangolo sferico* **PSM** *dà*

$$\text{sen}\,SPZ : \text{sen}\,SMZ :: \text{sen}\,SM : \text{sen}\,PS,$$

ossia

$$\text{sen}\,h' : \text{sen}\,i :: \text{sen}(90^\circ - Z) : \text{sen}(90^\circ - \delta);$$

poichè essendo l'angolo in P *assai piccolo, nel caso nostro può prendersi* **MS = MS'**; *quindi sarà anche*

$$h' = i\,\frac{\cos Z}{\cos\delta} = \frac{i\cos(L-\delta)}{\cos\delta} \quad ; \quad \theta' = \frac{i\cos(L-\delta)}{15\cos\delta}.$$

3.° Per l'errore azimutale, sia ZSO *il circolo descritto dallo strumento, che fa un angolo* a *col meridiano: il triangolo* ZPS *darà*

$$\text{sen}\,SPZ : \text{sen}\,PZS :: \text{sen}\,ZS : \text{sen}\,PS;$$

donde

$$\text{sen}\,h'' : \text{sen}(180^\circ - a) :: \text{sen}\,Z : \text{sen}(90^\circ - \delta),$$

ed

$$h'' = \frac{a\,\text{sen}(L-\delta)}{\cos\delta} \quad ; \quad \theta'' = \frac{a\,\text{sen}(L-\delta)}{15\cos\delta}.$$

Essendo questi angoli piccolissimi, l'errore totale sarà la somma degli errori parziali; quindi il passaggio vero t *sarà uguale al passaggio osservato* $t_0 + \theta + \theta' + \theta''$.

Per regolare gli orologi siderali, si fa uso delle stelle, di cui si conosce l'ascensione retta α; *e questa ridotta in tempo è l'ora che deve indicare l'orologio ben regolato: se vi è una differenza* K, *sarà essa l'errore dell'orologio stesso. Sia pertanto* t_0 *il passaggio osservato: dovrà esser sempre*

$$\alpha = t_0 + K + \frac{c}{15\cos\delta} + \frac{a\,\text{sen}(L-\delta)}{15\cos\delta} + \frac{i\cos(L-\delta)}{15\cos\delta}.$$

Gli errori c *e* i *si hanno direttamente, il primo dal rovescia-*

mento del cannocchiale contro una mira lontana, il secondo dal livello; onde resta a trovare a: perciò si osservi un altra stella nota di declinazione assai diversa; sarà

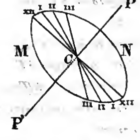
$$\alpha' = t'_o + K + \frac{c}{15\cos\delta'} + \frac{a\,sen\,(L-\delta')}{15\cos\delta'} + \frac{i\cos(L-\delta')}{15\cos\delta'}\ ,$$

nelle quali non si hanno incognite che a e K, donde si avrà l'errore dell'azimut e dell'orologio. L'errore di azimut si determina molto più accuratamente osservando i passaggi della stella polare sopra e sotto il polo, e mettendo lo strumento in modo, che l'intervallo de' passaggi sia 12 ore siderali esatte.

Appendice

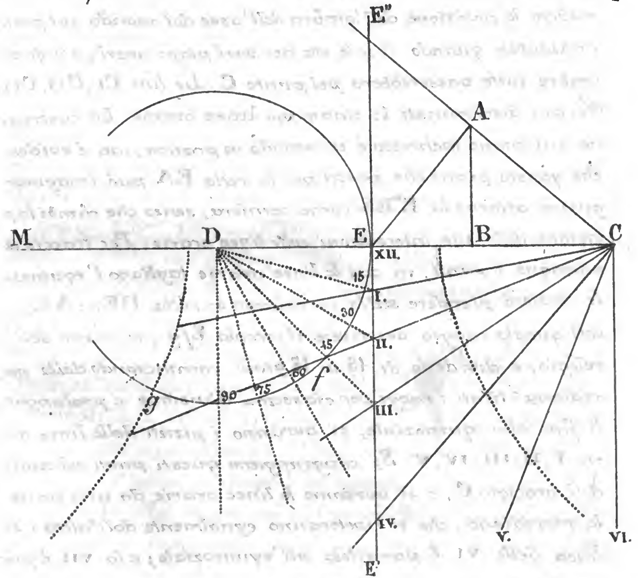
Gnomonica. — *Questa è l'arte di delineare gli orologi solari: questi sono di tre specie principalmente:* 1.° equinoziali, 2.° orizzontali, 3.° verticali; *le quali denominazioni dipendono dal piano su cui sono delineati.*

Equinoziali — *Sia* MN *un piano inclinato all'orizzonte esattamente quanto l'equatore; su questo piano si eriga uno stile* PCP' *ad esso perpendicolare, che rappresenterà l'asse del mondo. Per quest'asse s'imaginino condotti 12 piani, e col centro in C si descriva un circolo. I 12 piani taglieranno il circolo in 24 parti: se il primo di questi piani coincide col meridiano, gli altri indicheranno successivamente le altre ore del giorno, mediante l'ombra che lo stilo getterà lungo ciascuna divisione. L'ombra dello stilo cadrà nella faccia superiore del piano, quando il sole*



starà nei segni superiori, *cioè dal 21 Marzo al 21 Settembre, e nella faccia inferiore per gli altri sei mesi. Nel momento degli equinozî il piano adombrerà se stesso, e non vi sarà ombra di stile..*

Orizzontali — *L'orologio orizzontale è la proiezione dell'orologio equinoziale sul piano orizzontale. Per tracciarlo si procede a questo modo. Sia* CM *la linea meridiana trovata an*



tecedentemente col metodo sopra indicato. Si alzi lo stile AB *perpendicolare al piano orizzontale: nel vertice di questo stile si concepisca passare la retta* AC *parallela all'asse del mondo; che forerà il piano in* C *(che dicesi centro dell'orologio) sotto un angolo* ACB *eguale alla latitudine geografica, o altezza del polo. Per* A

si tiri un piano indefinito perpendicolare all'asse del mondo, che sarà il piano dell'equatore: questo incontrerà la meridiana in **E**, e taglierà il piano secondo una retta **E''EE'**, che dicesi l'equinoziale. Su questo piano così inclinato è chiaro che si potrebbe descrivere un orologio equinoziale, e per le divisioni delle ore si potrebbero tirare delle rette che andrebbero ad incontrare l'equinoziale in altrettanti punti **I, II, III, &c**, che determinerebbero la posizione dell'ombra dell'asse del mondo sul piano orizzontale quando il sole sta nei varî piani orarî, e le quali ombre tutte passerebbero pel punto **C**. Le line **CI, CII, CIII, &c.** così determinate si chiamano **linee orarie**. La costruzione sul piano inclinato è incomoda in pratica; ma è evidente che questo piano che passa per la retta **EA** può imaginarsi girare attorno la **E''EE'** come cerniera, senza che cambi la posizione delle sue intersezioni colle linee orarie. Per tracciare adunque i punti, in cui le linee orarie tagliano l'equinoziale, basterà prendere sulla meridiana la retta **DE=AE**, e con questo raggio descrivere il circolo **Efg** pel piano dell'orologio, e dividerlo di 15 in 15 gradi cominciando dalla meridiana: tirati i raggi per ciascuna divisione e prolungatili fino alla equinoziale, si avranno i punti delle linee orarie **I, II, III, IV, V.** Si congiungano questi punti col centro dell'orologio **C**, e si avranno le linee orarie da una parte della meridiana, che si ripeteranno egualmente dall'altra. La linea delle **VI** è parallela all'equinoziale, e la **VII** è prolungamento dell'**XI**, l'**VIII** della **X**, e via discorrendo.

L'ombra dell'estremità del gnomone **A** descrive in ciascun giorno una curva, che è l'intersezione di un cono col piano orizzontale. Questo cono è l'opposto al vertice di quello che descrive il raggio solare, che passa sempre pel vertice dello

gnomone, ed ha per base in cielo il parallelo diurno descritto dal sole. L'intersezione di questo cono nei nostri climi è una iperbola, salvo il giorno dell'equinozio che diventa una retta: sotto al circolo polare è una parabola, oltre il circolo polare è una ellissi, e al polo è un circolo. Quindi si sogliono tracciar negli orologi solari tali iperbole, almeno pei limiti de' due solstizî; e così, cancellato tutto il resto della costruzione, rimangono sole le linee orarie. Queste iperbole si calcolano per punti, dietro l'altezza del sole e la lunghezza dell'ombra di ciascun angolo orario per le diverse declinazioni.

Siccome molte volte la costruzione non può o non vuol farsi, così si suole calcolare l'angolo che ogni linea oraria fa colla meridiana: sia questa p. e. la CF'. *Abbiamo*

$$\text{tang}\, F''CE' = \frac{EE}{E''C} = \frac{DE\, \text{tang}\, E'DE}{\frac{EA}{\text{sen}\, ECA}} = \frac{DE\, \text{tang}\, h^{\circ} \text{sen}\, L}{DE} = \text{tg}\, h^{\circ} \text{sen}\, L:$$

fatto $h^{\circ} = 15^{\circ}, 30^{\circ}, 45^{\circ}$, &c., *si avranno successivamente gli angoli delle varie linee orarie. La posizione del centro dell'orologio si può pure trovare col calcolo, essendo* $BC = \frac{AB}{\text{tg}\, L}$, *e l'equinoziale sarà determinata da* $EB = \frac{AB}{\cot L}$.

Verticali. — *L'orologio verticale può costruirsi in un piano perfettamente perpendicolare al meridiano, e allora la sua descrizione è come quella dell'orologio orizzontale, mutando* L *in* 90°−L. *Ma in generale il muro fa un angolo col primo verticale, e dicesi* declinare; *e devesi prima trovare la meridiana e la declinazione del muro.*

La meridiana in un muro verticale si traccia facilmente: basta osservare dove cade (fig. A) *l'estremità* M *dell'ombra dello stilo a mezzodì vero; e, notato quel punto, tirare per essa una verticale. La meridiana essendo l'intersezione del meridiano col muro verticale, è chiaro che ogniqual volta il sole sarà nel meridiano, lo stilo getterà l'estremi-*

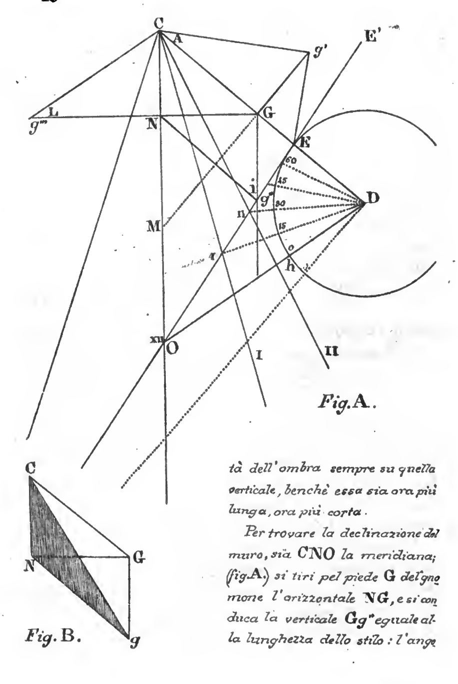


Fig.A.

Fig. B.

tà dell'ombra sempre su quella verticale, benchè essa sia ora più lunga, ora più corta.

Per trovare la declinazione del muro, sia **CNO** *la meridiana; (fig.* **A.**) *si tiri pel piede* **G** *del gnomone l'orizzontale* **NG**, *e si conduca la verticale* **Gg''** *eguale alla lunghezza dello stilo: l'ango*

lo $Ng''G$ *sarà la declinazione, e si avrà il suo valore dall'equazione*

$$\tang Ng''G = \frac{NG}{Gg''} = \tang i .$$

Per tracciare il resto dell'orologio, il problema si riduce a quello dell'orologio orizzontale per un paese che abbia l'orizzonte parallelo al muro. *Infatti pel vertice dello stile si faccia passare una retta parallela all'asse del mondo: questa forerà il piano dell'orologio nel punto* C *(fig. B) della nostra meridiana; e conducendo per lo stilo e per* C *un piano* CgG *che sia normale al muro, l'elevazione* gCG *dell'asse del mondo sul piano del muro sarà la latitudine di questo luogo, e la retta* GC *sarà la sua meridiana. Questa retta da noi dicesi* sustilare. *Per trovare la posizione della sustilare graficamente e gli altri elementi dell'orologio; si osservi che i tre piani che passano pel vertice del gnomone, cioè il meridiano locale* CNg, *il piano normale al muro che passa per la sustilare, cioè* GCg, *e il piano orizzontale* NgG *formano un angolo solido in* g; *ossia la piramide* gCNG; *e si deve costruire l'orologio solare orizzontale sulla sustilare* CG *colla latitudine* gCG. *Si* ribatta *sul piano del muro la faccia* NGg *(fig. B.) in* NGg'' *(fig. A): e conoscendosi in questo triangolo i cateti* NG *distanza del piede del gnomone dalla meridiana, e* Gg'' *lunghezza del gnomone, si avrà l'ipotenusa* Ng''. *Si ribatta similmente in appresso la faccia* CNg *(fig. B) in* CNg''' *(fig. A), prolungando la retta* NG *finchè divenga uguale ad* Ng''' = Ng'': *si faccia in* g'' *l'angolo* Cg''N *eguale alla latitudine geografica del luogo ove si fa l'orologio, e si tiri sotto quest'angolo la retta* g'''C, *che determinerà il centro dell'orologio sulla meridiana locale. Congiunto* C *con* G *per mezzo della*

retta CG, e prolungata quindi questa retta in D, si avrà la sustilare. Ribattendo finalmente la faccia gCG della piramide in CGg', erigendo Gg' perpendicolare ed eguale allo stilo, tirata $g'C$, sarà $g'CG$ la latitudine dell'orologio da costruire. Condotta adunque $g'E$ perpendicolare a Cg', il punto E sarà il luogo dove deve passare l'equinoziale E'EO: preso DE sulla sustilare $= Eg'$, si descriva il circolo Eh: si congiunga il punto in cui l'equinoziale taglia la meridiana col centro D del circolo, e dal luogo di intersezione h si cominci la divisione di 15 in 15 gradi, e condotte le secanti $C\text{I}$, $C\text{II}$, &c., queste determineranno sulla equinoziale le linee orarie, che si tracceranno come nell'orologio orizzontale. La ragione di tal divisione è evidente, essendo la meridiana una linea oraria per il luogo che ha l'orizzonte parallelo al muro, come la sustilare è una linea oraria pel luogo ove si fa; e l'angolo orario EDO tra queste due linee è la longitudine relativa de' due luoghi.

Per calcolare queste linee, si ha

$$Ng'' = \sqrt{Gg''^2 + NG^2} \quad , \quad NC = Ng'' \operatorname{tang} L \,,$$

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} GCg' = \frac{Gg'}{Cg'} = \frac{Gg'}{Cg'''} \;:$$

ora

$$Cg''' = \frac{Ng''}{\cos L} = \frac{Ng''}{\cos L} = \frac{Gg''}{\cos L \cos i} \;;$$

donde sostituendo e riducendo

$$\operatorname{sen} A = \cos L \cos i \,.$$

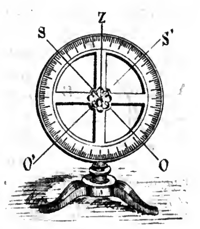
Questa formola si ottiene anche dai triangoli sferici: si concepisca il centro della sfera collocato nel vertice del gnomone; le tre facce della piramide tagliano sulla sfera un triangolo sferico rettangolo sul raggio gN; donde si avrà

$$\cos.\,\text{ipotenusa}\; CgG = \cos.\,\text{cat.}\; CgN \times \cos.\,\text{cat.}\; NgG \,,\quad \cos(90°-A) = \operatorname{sen} A = \cos L \cos i \,.$$

CAPO III.

Determinazione delle coordinate celesti

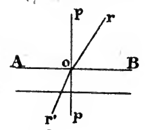
Altezze e distanze zenitali. — QUESTE *si determinano mediante le lunghezze delle ombre di gnomoni, o più esattamente coi quadranti graduati o coi circoli interi mobili attorno assi verticali. Il punto di partenza in questi strumenti è la direzione della verticale, la quale nei quadranti si determina con un filo a piombo sospeso dal centro dello strumento. Però il filo a piombo negli strumenti forniti di cannocchiale non può far altro che indicare la stabilità dello strumento; e per determinare la direzione della verticale rapporto all'asse ottico dello strumento si deve far uso di altri mezzi. Infatti l'asse ottico del cannocchiale è quella linea che passa pel centro dell'apertura dell'obbiettivo, e la croce dei fili del reticolo che sta al diaframma focale dell'oculare; i quali due punti è impossibile definire direttamente, e perciò bisogna ricorrere a metodi indiretti, che sono i seguenti.*



Nei circoli interi e nei quadranti mobili si determinerà mettendo prima ben verticale l'asse di rivoluzione col livello di cui dev'esser fornito lo strumento; e mirando a un og-

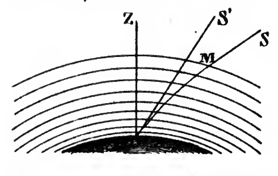
getto o ad un astro col cannocchiale posto sulla direzione OS, e leggendo il circolo: indi si rovescierà lo strumento in azimut di 180° onde il cannocchiale vada dall'altra parte sulla posizione OS': si ricondurrà quindi verso l'astro come prima, e si rileggerà il circolo: l'arco percorso SCS' sarà doppio della distanza zenitale. Se lo strumento non può rovesciarsi, si determinerà il punto della graduazione a cui corrisponde la linea orizzontale, guardando prima direttamente una stella, e poi la stessa per riflessione in un liquido stagnante: la semisomma delle due letture darà la posizione della linea orizzontale, donde a 90° si avrà la verticale. Finalmente può determinarsi la verticale, guardando in un bagno di mercurio l'imagine dei fili di ragno tesi nel foco dell'oculare del cannocchiale illuminati fortemente, e riflessa da un bagno di mercurio posto sotto al cannocchiale stesso collocato verticalmente. Quando l'imagine diretta e riflessa coincidono, allora lo strumento è perfettamente verticale, e la lettura del circolo dà lo zero delle distanze zenitali.

Però tutte le altezze degli astri sono modificate dalla refrazione dell'aria atmosferica, onde abbisognano di una correzione, che è diversa per le varie altezze. Sia AB la superficie che divide due strati di aria, l'uno più denso e l'altro meno denso: per la nota legge di fisica un raggio che viene nella direzione or sarà rifratto in o, e si accosterà alla perpendicolare alla superficie dirimente tirata al punto d'ingresso, e andrà per r': e 1.° il raggio rifratto ed incidente staranno nello stesso piano, e 2.° il rapporto degli angoli si avrà dalla relazione

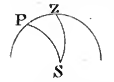


$$\frac{\text{sen} \angle \text{incid.}}{\text{sen} \angle \text{refraz.}} = n.$$

L'atmosfera è così costituita, che la sua densità diminuisce dalla superficie terrestre alle più alte regioni con una legge ignota, ma che prossimamente è tale, che crescendo le altezze in progressione aritmetica, la densità scema in progressione geometrica. Si imagini pertanto l'atmosfera divisa in tanti strati sottilissimi, onde possano supporsi omogenei: nel passaggio da uno all'altro di essi il raggio devierà dalla perpendicolare per un angolo infinitesimo: i quali angoli sommandosi successivamente, faranno che il raggio descriva una curva **SMO**, *e l'astro invece di vedersi in* **S** *si vedrà in* **S'** *lungo la tangente all'ultimo elemento della curva, quando entra nell'occhio dell'osservatore. La quantità* **SOS'**, *di cui è spostato l'astro dicesi* refrazione astronomica. *E' chiaro dietro le leggi suddette, che la refrazione, se è regolare,* **1.°** *non sposta punto lateralmente gli oggetti;* **2.°** *che li alza tutti;* **3.°** *che è nulla allo zenit;* **4.°** *massima all'orizzonte, ove è di* **34'** *circa. Per le altre altezze gli Astronomi hanno costruito tavole apposite, che sono assai precise fino a 72 gradi di distanza zenitale, ma sempre incerte più presso l'orizzonte. La cagione di queste incertezze nasce dall'esser la rifrazione dipendente dalla pressione barometrica, e dalla temperatura, le quali quantità non si conoscono che nel punto* **O**, *mentre invece agiscono nel raggio per un lungo tragitto di strati*



di aria assai lontani dall'osservatore. L'effetto della refrazione può determinarsi a questo modo. Si osservi l'altezza apparente e l'azimut di un astro (quest'ultimo non è variato dalla refrazione); si noti l'ora dell'osservazione, onde se ne saprà il suo angolo orario; e nota essendo la latitudine del luogo, nel triangolo sferico PZS si conoscono gli



angoli PZS = 180° − azimut; l'angolo orario ZPS, e il lato PZ: si calcoli ZS e si confronti questa altezza calcolata colla osservata: la differenza sarà la refrazione.

Gli studî teorici de' fisici hanno condotto a varie formole su quest'oggetto: la più ovvia è la seguente.

$$\tang AR = B \tang (Z - AR) ;$$

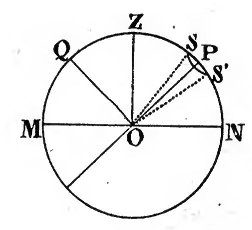
o anche

$$\tang R = A \tang Z + B tg^3 Z + \&c.,$$

ove si dovranno determinare o col modo suddetto, o con altro simile le due costanti A e B &c.

Declinazioni. — Queste si determinano prendendo la distanza degli astri dall'Equatore, quando passano per il meridiano. Gli antichi perciò usavano grandi quadranti fissati al muro nel piano del meridiano, detti **murali**. Ora il modo più semplice ed esatto è di applicare all'asse dello stromento dei passaggi un circolo graduato con somma perfezione, e servirsi di questo per prendere le distanze polari degli astri, donde si concludono le declinazioni.

Il punto corrispondente al polo si determina nello strumento a questo modo. Si osserva una stella circumpolare, e comunemente la polare stessa nel suo passaggio superiore pel meridiano, e 12 ore dopo nel suo passaggio



inferiore: si legge il circolo in ambedue i passaggi, e corrette le letture delle refrazioni, si prende la media, che esprime la posizione del polo. Infatti il punto S' starà tanto sotto al polo quanto il punto S era sopra; onde l'asse del mondo stando nel mezzo, la media delle due letture sarà la posizione del polo cercata. La semidifferenza poi delle letture darà PS, cioè la distanza polare della stella, che sottratta da 90° darà la declinazione. Conosciuto una volta il polo sullo strumento, la differenza di lettura di questo punto, e di una stella qualunque osservata darà la sua distanza polare. Se l'astro osservato sia un pianeta che abbia disco, si collimerà al lembo, e per avere il centro si aggiungerà il raggio al disco ridotto in arco. Si vede che per determinare le distanze polari non è necessario conoscere la latitudine geografica, e nemmeno la posizione della verticale nello strumento.

La lettura de' grandi circoli meridiani si fa coi microscopî forniti di viti micrometriche che danno i secondi di arco, e pei minori si usano i nonii. Sono i nonii piccoli

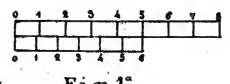


Fig. 1ª

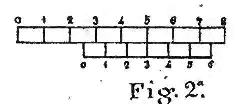


Fig. 2ª

tratti di scale graduate, che servono a suddividere gl'intervalli delle divisioni maggiori. Sia una riga graduata: si prenda un intervallo di n parti e si divida su di una piccola riga in parti $n+1$: questa piccola riga dicesi no.

nio. È evidente che ponendo vicine le righe, e facendo coincidere le due divisioni estreme, la prima divisione del nonio avanzerà di $\frac{1}{n^{sima}}$ su quella della riga; la seconda $\frac{2}{n^{ma}}$, la terza $\frac{3}{n^{ma}}$, e così via discorrendo; l'ultima poi $\frac{n}{n^{sima}}$, ossia una divisione intera. Talchè per sapere quanto disti una divisione del nonio da una divisione della riga, basterà contare quante righe corrono da quella fino alla divisione del nonio che combina con quella della riga: posto per es. che cinque parti della riga sieno divise in sei nel nonio, ogni divisione del nonio sarà più corta di $\frac{1}{6}$: e supponendo che lo zero del nonio non combini con nessuna divisione della riga, bisognerà contare tutte le divisioni fino al luogo ove ne è una che combini: e se sarà la 3ª, l'intervallo tra 0 e la divisione della riga sarà di $\frac{3}{6}$. Questo sistema si applica ai circoli, dando a ciascuna divisione il suo valore che le compete in arco.

Ascensioni rette. — *Vedremo a suo luogo come si determina l'ascensione retta assoluta delle stelle, e come si trova in cielo il punto di ariete. Per ora supporremo che si conosca bene l'ascensione retta almeno di una stella: tutte le altre si potranno facilmente determinare mediante le osservazioni dei passaggi al meridiano. Se lo strumento sia ben collocato, (o almeno l'osservazione corretta dagli errori strumentali, come si è detto sopra) l'intervallo del passaggio tra due stelle è la differenza della loro ascensione retta: quindi conosciuta l'Æ. di una, si ha subito quella di tutte le altre. I valori delle ascensioni rette e delle declinazioni delle stelle non sono costanti, ma mutano d'anno in anno; perchè, come vedremo a suo luogo, i punti equinoziali si muovono continuamente di 50",25*

all'anno contro l'ordine dei segni, il qual movimento chiamasi dagli astronomi Precessione degli Equinozî; *e cogli equinozî anche il polo della sfera muta luogo rapporto alle stelle: quindi devesi sempre assegnare l'epoca, per cui è stata data la posizione della stella.*

Cataloghi di stelle. — *Le liste delle stelle disposte secondo l'ordine delle loro ascensioni rette, con indicata la loro declinazione, formano ciò che dicesi* un catalogo di stelle. *Comunemente le stelle si distribuiscono in gruppi, detti* costellazioni, *i cui limiti sono vaghi ed affatto arbitrarî, o fissati solo per convenzione. Tali distinzioni servono a trovare prossimamente il luogo ad occhio nudo; ma la vera loro posizione si fissa solo per le coordinate di Æ. e declinazione. Le costellazioni dividonsi in tre classi: la prima è delle Zodiacali, e ne abbiamo dati sopra i nomi.*

La seconda classe occupa la parte settentrionale del cielo rapporto all'eclittica, e sono

1. Pegaso.	9. Cocchiere.	16. Serpente.
2. Andromeda.	10. Dragone.	17. Lira.
3. Cassiopea.	11. Chioma di Berenice.	18. Aquila.
4. Cefeo.	12. Boote.	19. Antinoo.
5. Perseo.	13. Corona.	20. Cigno.
6. Orsa Maggiore.	14. Ercole.	21. Freccia.
7. Orsa Minore.	15. Ofiuco, *ovvero* Serpentario.	22. Delfino.
8. Triangolo.		23. Cavallino.

Recentemente sono state aggiunte alcune formate dalla suddivisione delle antiche: tali sono

I Levrieri, *la* Giraffa, *il* Mietitore, *la* Renna, *la* Volpe, *la* Lucertola, Cerbero, *il* Ramo, &c.

La terza classe occupa l'emisfero australe : le antiche sono

1.° Balena.	6.° Cane Minore.	11.° Centauro.
2.° Eridano.	7.° Nave d'Argo.	12.° Lupo.
3.° Lepre.	8.° Idra.	13.° Altare.
4.° Orione.	9.° Tazza.	14.° Pesce Australe.
5.° Cane Maggiore.	10.° Corvo.	

Molte altre qui pure sono state aggiunte dai Navigatori ed Astronomi moderni, desunte ordinariamente dagl'istrumenti di arti e scienze. Tali sono la Macchina Pneumatica, *l'*Elettrica, *il* Fornello Chimico, *la* Bussola, *l'* Apparato del Pittore, *dello* Scultore, *il* Microscopio, *il* Telescopio, *&c.*

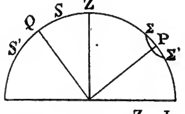
Il più antico di tutti i cataloghi è quello di Ipparco conservatoci da Tolommeo, quindi quello dell'Arabo Ulugh Beigh. Al rinascere delle scienze Evelio, Halley, e sopratutti Maskelyne e Bradley fecero cataloghi importanti, e il P. Piazzi superò tutti i suoi antecessori al principio di questo secolo. Ora se ne hanno molti e ricchissimi, tra' quali quello dell'Associazione Britannica (B.A.C.) *dà la posizione di* 8377 *stelle principali : si hanno pure quelli dell' Osservatorio di Greenvich e molti altri che sarebbe troppo enumerare.*

Nei cataloghi è notata, oltre la posizione della stella, la sua variazione di luogo per la precessione e altri coefficienti per calcolare altri piccoli moti, de' quali parleremo a' loro luoghi.

Longitudini e Latitudini celesti. — *Queste non si osservano direttamente ; ma si calcolano colle formole che daremo nel capo seguente.*

Latitudine Geografica. — *Si può questa determinare col sole, come si è detto, e colle stelle circumpolari. Trovata che siasi la posizione del polo, come si è detto sopra, nel*

circolo meridiano, si definisca similmente lo zenit coi metodi dati: la distanza dal zenit al polo è il complemento della latitudine; ma se non siasi in un Osservatorio fisso, essa si determina col circolo ripetitore, prendendo la stella polare nel suo passaggio al meridiano sopra e sotto del polo. La media di queste distanze zenitali (corrette, s'intende, dalla refrazione) è il complemento della latitudine. In mare, e dove non si richiede molta precisione, si fa uso dell'osservazione del sole, del quale si ha dalle efemeridi astronomiche la declinazione per ogni giorno. Infatti la distanza zenitale del sole SZ o S'Z è sempre uguale alla latitudine ZQ, più o meno la declinazione, onde si ha



$$Z = L - \delta;$$

quando il sole è nell'emisfero australe, δ è negativo, e si ha

$$Z = L - (-\delta) = L + \delta;$$

donde

$$L = Z \pm \delta.$$

Osservata dunque l'altezza del sole quando sta nel meridiano e applicatevi le correzioni di refrazione, (e depressione dell'orizzonte, se si osserva in mare col sestante; e quella della parallassi, di cui a suo luogo diremo) si avrà la latitudine. In mare il sole si giudica nel meridiano dall'aver esso raggiunta la sua massima altezza.

Longitudine geografica. — Essendo questa l'arco di equatore intercetto tra i due meridiani, si potrà questo conoscere dalla differenza de' tempi locali per un medesimo istante di tempo assoluto. Così per esempio il principio di una ecclisse di Luna, che accade per tutto il mondo

nel tempo medesimo sarà notato a ore diverse in due luoghi diversi per la differenza dei meridiani, e le differenze di quei tempi sarà la differenza di longitudine. Così pure può questa ottenersi, portando un buon orologio da un sito all'altro, e confrontando l'orologio che conserva il tempo del luogo da cui si è partito col tempo del luogo ove è l'osservatore. Tale è la pratica de'naviganti, i quali portano seco i cronometri che vanno col tempo del porto, ed essi in mare determinano il tempo di bordo, cioè del punto ove sono, mediante gli angoli orarî del sole calcolati colle altezze. Adesso nei continenti si fa uso del telegrafo elettrico per conoscere le differenze di longitudine: l'appulso dato dal telegrafo essendo sensibilmente simultaneo nei due luoghi, le diverse ore indicate dagli orologi locali ben regolati sono la differenza di longitudine. Vedremo altrove anche altri metodi.

Nascere e tramontare degli astri. — Si prenda la formola [(a) cap.II]: per una distanza zenitale qualunque ci da

$$\cos Z = \operatorname{sen} L \operatorname{sen} \delta + \cos L \cos \delta \cos h :$$

se si faccia $Z = 90°$, l'astro sarà all'orizzonte, e si avrà

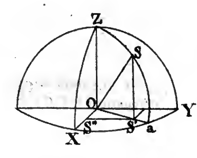
$$\cos h_o = - \operatorname{tg} L \operatorname{tg} \delta .$$

Questa formola dà l'arco semidiurno h_o dell'astro, che tradotto in tempo serve a calcolare l'ora del nascere e tramontare degli astri all'orizzonte razionale. Se si vuole tener conto della refrazione, si farà $Z = 90° + 0°34'$: e se si vuole calcolare il principio dell'aurora, o il fine del crepuscolo della sera, si farà $Z = 90° + 18°$.

CAPO IV.

Trasformazione delle coordinate

La posizione di un punto qualunque sulla sfera celeste, oltre i metodi trigonometrici, può anche determinarsi mediante le coordinate rettangolari alla stessa maniera che dai geometri è determinata la posizione di un punto nello spazio, cioè riferendola a tre assi rettangolari. Eccone il modo.



Sia XOY il piano di un circolo massimo della sfera celeste, il cui polo in Z. Preso il suo piano per quello delle coordinate X, Y, e tracciati gli assi ortogonali OX, OY, sia OZ l'asse delle z ed S un punto qualunque sulla sfera celeste.

Per determinare la posizione di S, si abbassi da esso sul piano XY una perpendicolare SS', e da S' si tiri un altra perpendicolare S'S" sull'asse OX: il punto S avrà per coordinate

$$x = OS'' , \; y = S'S'' , \; z = SS'.$$

I valori di queste linee possono facilmente esprimersi per le coordinate angolari della sfera. Si conduca pel polo del circolo e per l'astro un piano perpendicolare al piano XY, e sia $= a$ l'angolo che la sua intersezione col piano XY fa coll'asse OX, computando quest'angolo da 0° a 360°. Sia b l'altro angolo SOa che fa il raggio OS col piano sottoposto, e si computi sempre nel piano mobile ZOS da

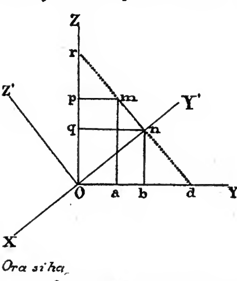
$0°$ *a* $+90°$, *dalla parte superiore di* XY*; e da* $0°$ *a* $-90°$ *nell'inferiore. Proiettando il raggio vettore* $OS=r$ *sul piano* XY, *la sua proiezione avrà per valore*

$$OS' = r\cos b\ , \qquad \text{che faremo} = \rho\,.$$

Quindi le coordinate rettangolari avranno i seguenti valori

$$(1)\quad \begin{cases} x = OS'' = OS'\cos a = \rho\cos a = r\cos b\cos a\,, \\ y = S'S'' = OS'\operatorname{sen} a = \rho\operatorname{sen} a = r\cos b\operatorname{sen} a\,, \\ z = SS' = OS\operatorname{sen} b = \rho\operatorname{tang} b = r\operatorname{sen} b. \end{cases}$$

Per passare dalle coordinate relative ad un piano a quelle prese rapporto ad un altro, bisogna conoscere la loro inclinazione e il luogo dove si tagliano, che dicesi il Nodo.



Sia un sistema di assi ortogonali OX, OY, OZ *ed un altro sistema* OX, OY', OZ', *nei quali sia comune l'asse* OX *e la origine* O *: le* x *saranno identiche nei due sistemi ; e per le altre coordinate sarà pel primo*

$$y = Oa\ , \qquad z = am;$$

pel secondo

$$y' = On\ , \qquad z' = mn.$$

Ora si ha

$$Oa = Ob - ab = On\cos nOb - mn\cos mdO\,,$$

$$ma = Op = Oq + pq = On\cos qOn + mn\cos nrO\ ;$$

e facendo l'angolo $(YY') = (ZZ') = \omega = nOb = 90° - qOn = mrO\,,$

avremo $$x = x',\quad y = y'\cos\omega - z'\,\text{sen}\,\omega,\quad z = y'\,\text{sen}\,\omega + z'\cos\omega. \quad (2)$$

Moltiplicando la seconda per $\cos\omega$ e la terza per $\text{sen}\,\omega$, e sommandole; poi moltiplicando la seconda per $\text{sen}\,\omega$ e la terza per $\cos\omega$, e sottraendole, si avrà

$$(3)\quad \begin{cases} x' = x, \\ y' = y\cos\omega + z\,\text{sen}\,\omega, \\ z' = z\cos\omega - y\,\text{sen}\,\omega. \end{cases}$$

Siano ora le coordinate del primo sistema

$$x = r\cos a\cos b,\quad y = r\,\text{sen}\,a\cos b,\quad z = r\,\text{sen}\,b;$$

e quelle del secondo, se sia $r' = r$,

$$x' = r\cos a'\cos b',\quad y' = r\,\text{sen}\,a'\cos b',\quad z' = r\,\text{sen}\,b';$$

si otterrà dalle (2)

$$(4)\quad \begin{cases} \cos a\cos b = \cos a'\cos b', \\ \text{sen}\,a\cos b = \text{sen}\,a'\cos b'\cos\omega - \text{sen}\,b'\,\text{sen}\,\omega, \\ \text{sen}\,b = \text{sen}\,b'\cos\omega + \text{sen}\,a'\cos b'\,\text{sen}\,\omega; \\ \text{e dividendo la seconda per la prima} \\ \text{tang}\,a = \text{tang}\,a'\cos\omega - \dfrac{\text{tang}\,b'\,\text{sen}\,\omega}{\cos a'}, \end{cases}$$

che danno le coordinate del piano inferiore per quelle del superiore.

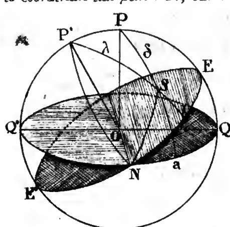
Inversamente le (3) danno

$$(5)\quad \begin{cases} \cos a'\cos b' = \cos a\cos b, \\ \text{sen}\,a'\cos b' = \text{sen}\,a\cos b\cos\omega + \text{sen}\,b\,\text{sen}\,\omega, \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \operatorname{sen} b' = \operatorname{sen} b \cos\omega - \operatorname{sen} a \cos b \operatorname{sen}\omega, \\ \operatorname{tang} a' = \operatorname{tang} a \cos\omega + \dfrac{\operatorname{tang} b \operatorname{sen}\omega}{\cos a}; \end{cases}$$

che danno quelle del piano **superiore** *per quelle dell'* **inferiore**.

Queste formole si applicano facilmente alle coordinate de' corpi celesti. Sia **NQQ'** *un circolo massimo della sfera, ed* **NEE'** *un altro ad esso inclinato di un angolo* $ENQ = \omega$ *: contando le coordinate dal punto* **N**, *sarà* $Na = a$, $aS = b$, $Nl = a'$, $lS = b'$; *e varranno le formole superiori. Se poi* **NQ** *è l'equatore ed* **NE** *l'ecclittica;* **N** *il punto d'ariete,* ω *l'obliquità della ecclittica; chiamando* α *e* δ *la ascensione retta e la declinazione,* **l** *e* λ *la longitudine e latitudine dell'astro* **S**, *sarà*



$$(6)\quad \begin{cases} \cos\delta\cos\alpha = \cos\lambda\cos l, \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\delta = \cos\lambda \operatorname{sen} l \cos\omega - \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\omega, \\ \operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\lambda\cos\omega + \cos\lambda \operatorname{sen} l \operatorname{sen}\omega, \\ \operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang} l \cos\omega - \dfrac{\operatorname{tang}\lambda \operatorname{sen}\omega}{\cos l}. \end{cases}$$

Le ultime due danno α *e* δ, *noto essendo* **l** *e* λ, *e la prima serve a confermare il calcolo. Similmente*

$$(7)\quad \begin{cases} \cos\lambda\cos l = \cos\delta\cos\alpha, \\ \operatorname{sen} l \cos\lambda = \operatorname{sen}\alpha\cos\delta\cos\omega + \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\omega, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \operatorname{sen}\lambda = \operatorname{sen}\delta\cos\omega - \cos\delta\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\omega\,, \\ \operatorname{tang.l} = \operatorname{tang}\alpha\cos\omega + \dfrac{\operatorname{tang}\delta\operatorname{sen}\omega}{\cos\alpha}\,. \end{cases}$$

Le ultime due danno λ ed $\mathbf{l}$, conoscendo α e δ.

La trasformazione dell'ascensione retta e declinazione in longitudine e latitudine si fa più comodamente nel modo seguente. Se $\mathbf{N}$ rappresenta il nodo dell' ecclittica coll'equatore, fatto $\omega = \mathbf{ENQ}$, ed insieme facendo $\mathbf{SN} = \mathbf{P}$, $\mathbf{SNa} = \varphi$; il triangolo rettangolo $\mathbf{SNa}$ darà

$$\cos\mathbf{P} = \cos\alpha\cos\delta \quad , \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\delta}{\operatorname{sen}\alpha}\,,$$

il triangolo poi $\mathbf{SNl}$ darà

$$\operatorname{sen}\lambda = \operatorname{sen}\mathbf{P}\operatorname{sen}(\varphi-\omega) \quad , \quad \operatorname{tang.l} = \operatorname{tg.}\mathbf{P}\cos(\varphi-\omega)\,;$$

e viceversa si avrà l'ascensione retta e la declinazione dalla longitudine e latitudine per mezzo delle formole

$$\cos\mathbf{P} = \cos\mathbf{l}\cos\lambda \quad , \quad \operatorname{tg.}\varphi = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\operatorname{sen}\mathbf{l}}\,,$$

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\mathbf{P}\operatorname{sen}(\varepsilon+\varphi)\,,$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}\mathbf{P}\cos(\varepsilon+\varphi)\,.$$

Quando il principio degli archi non coincide col nodo dei piani si aggiungerà a ciascuno di essi la quantità necessaria per trasportare l'origine nel nodo, ovvero si sottrarrà come troverassi più spediente. Così per es. se, dato l'azimut e l'altezza di un astro, si cerchi la sua ascension retta e la declinazione, la figura e le formole precedenti scioglieranno il problema, supponendo che $\mathbf{NQ}$ sia l'orizzonte ed $\mathbf{NE}$ l'equatore: $\mathbf{N}$ sarà il punto ovest ed $\omega =$ al complemento di latitudine $= 90^\circ - \mathbf{L}$. Siccome però l'$\mathbf{AR} = \mathbf{Tsid.}$ dell'osservatore — angolo orario, le due coordinate da trovar-

si saranno l'angolo orario e la declinazione. Ora gli angoli orari e gli azimut si contano non dal punto ovest, ma dal meridiano; quindi dovremo porre

$$a = 90^\circ - azimut = 90^\circ - a_o ,$$

$$b = Altezza = A ,$$

$$a' = 90^\circ - angolo\ orario = 90^\circ - h ,$$

$$b' = Declinazione = \delta :$$

e le formole saranno

$$(8)\quad \begin{cases} \cos\delta \,\mathrm{sen}\, h = \cos A \,\mathrm{sen}\, a_o , \\ \cos\delta \cos h = \cos A \cos a_o \,\mathrm{sen}\, L + \mathrm{sen}\, A \cos L , \\ \mathrm{sen}\,\delta = \mathrm{sen}\, A \,\mathrm{sen}\, L - \cos A \cos a_o \cos L , \\ \mathrm{tang}\, h = \cot a_o \,\mathrm{sen}\, L + \dfrac{\mathrm{tang}\, A \cos L}{\mathrm{sen}\, A} , \\ \alpha = T\,siderale - h . \end{cases}$$

Per trovar poi l'altezza e l'azimut, conoscendo la declinazione e l'angolo orario, si avrà

$$(9)\quad \begin{cases} \cos A \,\mathrm{sen}\, a_o = \cos\delta \,\mathrm{sen}\, h , \\ \cos A \cos a_o = \cos\delta \,\mathrm{sen}\, h \,\mathrm{sen}\, L - \mathrm{sen}\,\delta \cos h , \\ \mathrm{sen}\, A = \mathrm{sen}\,\delta \,\mathrm{sen}\, L + \cos\delta \cos L \cos h , \\ \mathrm{tang}\, a_o = \cot h \,\mathrm{sen}\, L - \dfrac{\mathrm{tang}\,\delta \cos L}{\mathrm{sen}\, h} ; \end{cases}$$

e la prima delle precedenti servirà a conferma del calcolo.

CAPO V.

Della Parallasse

DICESI Parallasse *il cambiamento di posto che apparentemente subiscono gli oggetti per lo spostamento dell'osservatore*. Sia un osservatore in C che guardi un oggetto S e lo riferisca in Σ; se esso cangi posto e vada in A, il luogo dove apparentemente gli comparirà l'oggetto sarà Σ'. Questo fatto accade ogni dì, quando camminando noi, ci si spostano gli oggetti vicini, cui vediamo successivamente corrispondere a diversi oggetti lontani. L'angolo di cui si sposta l'oggetto ΣSΣ' = ASC dicesi Parallasse. E' manifesto che la parallasse varia 1.° col variare dello spostamento dell'osservatore: 2.° colla distanza dell'oggetto. Se supponiamo due osservatori, uno al centro della terra in C, l'altro alla superficie in A, i quali ambedue osservino lo stesso oggetto S, essi lo riferiranno a luoghi differenti Σ, Σ'; e la distanza dallo zenit per uno sarà ZCS, e per l'altro ZAS, che è maggiore di tutto l'angolo CSA; essendo nel triangolo ASC l'angolo esterno ZAS = ACS + ASC. L'effetto adunque della parallasse sui corpi celesti è di diminuire le loro altezze sopra l'orizzonte, ossia di accrescere le distanze zenitali.

Sia ora D la distanza di un oggetto, ed r il raggio della terra, ossia la distanza dell'osservatore al centro della mede-

sima, avremo

$$\frac{\text{sen ASC}}{\text{sen SAC}} = \frac{AC}{CS} = \frac{r}{D} ;$$

ossia indicando per p la parallasse ASC e per z la distanza zenitale vera, essendo

$$SAC = 180° - SAZ = 180° - z ,$$

sarà

(1)
$$\text{sen}\, p = \frac{r}{D} \cdot \text{sen}\, z .$$

Se l'angolo p sia piccolo, si potrà ridurre in secondi; ma a conservare l'omogeneità della formola è necessario ridurre l'arco in parti del raggio $=1$; il che si fa ~~moltiplicando~~ dividendo l'arco p pel numero di secondi R'' contenuti nell'arco di lunghezza eguale al raggio. Il raggio applicato sulla circonferenza abbraccia 57°17'44''.806; ossia 206264''.806: quindi per qualunque altra linea o arco p si avrà la proporzione

$$R'' : 1 = p : x = p : R'';$$

ora

$$\text{arc.}\,1'' = \frac{1}{206264.8} = \frac{1}{R''} = \text{sen}\,1'' ;$$

donde

$$R'' = \frac{1}{\text{sen}\,1''} , \qquad x = \frac{p}{\frac{1}{\text{sen}\,1''}} \cdot p\,\text{sen}\,1'' .$$

Può anche dirsi così

$$\text{sen}\, p'' \text{ per l'arco piccolo} = p \times \text{sen}\,1'';$$

donde si avrà

$$p = \frac{r}{D} \cdot \frac{\text{sen}\, z}{\text{sen}\,1''} = \frac{r}{D}\, \text{sen}\, z \,.\, 206265 .$$

Questa formola dà la parallasse espressa per la distanza zenitale apparente z: se vogliasi espressa per la distanza zenitale vera Z, quale cioè si avrebbe dal centro della terra, dovrà sostituirsi per z il suo valore

$$z = ZCS + ASC = Z + p \, ;$$

quindi

$$\operatorname{sen} p = \frac{r}{D} \operatorname{sen}(Z + p) = \frac{r}{D} \operatorname{sen} Z \cos p + \frac{r}{D} \cos Z \operatorname{sen} p \, .$$

donde, dividendo per $\cos p$ e riducendo,

$$(2) \qquad \operatorname{tang} p = \frac{\frac{r}{R} \operatorname{sen} Z}{1 - \frac{r}{R} \cos Z} \, .$$

Questa formola si svolge in serie ordinate per gli archi multipli di Z e per le potenze ascendenti di $\frac{r}{R}$, mediante la formola e lo sviluppo della funzione seguente. Sia in generale

$$\operatorname{tang} y = \frac{a \operatorname{sen} x}{1 - a \cos x} \, .$$

Per ottenere da questa l'arco y in funzione degli archi multipli x e delle potenze ascendenti di a, si è solito fare

$$\operatorname{tang} y = \frac{m}{n}$$

donde

$$d . \operatorname{tang} y = \frac{dy}{\cos^2 y} = d\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{ndm - mdn}{n^2} \; ;$$

$$dy = \frac{ndm - mdn}{n^2} \cos^2 y = \frac{ndm - mdn}{n^2(1 + \operatorname{tg}^2 y)} = \frac{ndm - mdn}{n^2\left(1 + \frac{m^2}{n^2}\right)} = \frac{ndm - mdn}{m^2 + n^2}$$

cioè nel caso nostro, facendo $m = a \operatorname{sen} x$, $n = 1 - a \cos x$, e differenziando [rapporto] ad a, si avrà

$$\frac{dy}{da} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - 2a \cos x + a^2} \, .$$

Il secondo membro si suole sviluppare in serie per il metodo dei coefficienti indeterminati, o cogli imaginarii; ma può farsi così colla semplice serie di Mac-Laurin

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1} f'(0) + \frac{z^2}{2} f''(0) \cdot$$

Ora si ha differenziando

sima, avremo

$$\frac{\text{sen}\,ASC}{\text{sen}\,SAC}=\frac{AC}{CS}=\frac{r}{D}\ ;$$

ossia indicando per p *la parallasse* ASC *e per* z *la distanza zenitale vera, essendo*

$$SAC=180^{\circ}-SAZ=180^{\circ}-z\ ,$$

sarà

(1) $$\text{sen}\,p=\frac{r}{D}\cdot\text{sen}\,z\ .$$

Se l'angolo p *sia piccolo, si potrà ridurre in secondi; ma a conservare l'omogeneità della formola è necessario ridurre l'arco in parti del raggio* $=1$*; il che si fa* ~~*moltiplicando*~~ *dividendo l'arco* p *pel numero di secondi* R'' *contenuti nell'arco di lunghezza eguale al raggio. Il raggio applicato sulla circonferenza abbraccia* $57^{\circ}\,17'\,44''.806$ *; ossia* $206264''.806$ *: quindi per qualunque altra linea o arco* p *si avrà la proporzione*

$$R'':1=p:x=p:R''\ ;$$

ora

$$\text{arc.}\,1''=\frac{1}{206264.8}=\frac{1}{R''}=\text{sen}\,1''\ ;$$

donde

$$R''=\frac{1}{\text{sen}\,1''}\qquad,\qquad x=\frac{P}{\text{sen}\,1''}\cdot p\ \text{sen}\,1''$$

Può anche dirsi così

$$\text{sen}\,p''\ \textit{per l'arco piccolo}=p\times\text{sen}\,1''\ ;$$

donde si avrà

$$p=\frac{r}{D}\cdot\frac{\text{sen}\,z}{\text{sen}\,1''}=\frac{r}{D}\,\text{sen}\,z\,.\,206265\,.$$

Questa formola dà la parallasse espressa per la distanza zenitale apparente z *: se vogliasi espressa per la distanza zenitale vera* Z*, quale cioè si avrebbe dal centro della terra, dovrà sostituirsi per* z *il suo valore*

$$z = ZCS + ASC = Z + p_1$$

quindi

$$\text{sen}\, p = \frac{r}{D}\,\text{sen}\,(Z+p) = \frac{r}{D}\,\text{sen}\, Z \cos p + \frac{r}{D}\cos Z\,\text{sen}\, p.$$

donde, dividendo per $\cos p$ e riducendo,

$$(2) \qquad \text{tang}\, p = \frac{\frac{r}{B}\,\text{sen}\, Z}{1 - \frac{r}{B}\cos Z}\,.$$

Questa formola si svolge in serie ordinate per gli archi multipli di Z e per le potenze ascendenti di $\frac{r}{R}$, mediante la formola e lo sviluppo della funzione seguente. Sia in generale

$$\text{tang}\, y = \frac{a\,\text{sen}\, x}{1 - a\cos x}.$$

Per ottenere da questa l'arco y in funzione degli archi multipli x e delle potenze ascendenti di a, si è solito fare

$$\text{tang}\, y = \frac{m}{n}$$

donde

$$d.\text{tang}\, y = \frac{dy}{\cos^2 y} = d\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{ndm - mdn}{n^2}\ ;$$

$$dy = \frac{ndm - mdn}{n^2}\cos^2 y = \frac{ndm - mdn}{n^2(1+tg^2 y)} = \frac{ndm - mdn}{n^2\left(1+\frac{m^2}{n^2}\right)} = \frac{ndm - mdn}{m^2 + n^2}\,,$$

cioè nel caso nostro, facendo $m = a\,\text{sen}\, x$, $n = 1 - a\cos x$, e differenziando rapporto ad a, si avrà

$$\frac{dy}{da} = \frac{\text{sen}\, x}{1 - 2a\cos x + a^2}.$$

Il secondo membro si suole sviluppare in serie per il metodo dei coefficienti indeterminati, o cogli imaginarii; ma può farsi così colla semplice serie di Mac-Laurin

$$f(z) = f(0) + \frac{z}{1}f'(0) + \frac{z^2}{2}f''(0).$$

Ora si ha differenziando

$$\frac{d^2y}{da^2}=\frac{d}{da}\frac{sen\,x}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{2sen\,x\cos x-2a\,sen\,x}{(1-2a\cos x+a^2)^2}$$

$$\frac{d^3y}{da^3}=\frac{-2sen\,x(1-2a\cos x+a^2)-(2sen\,x\cos x-2a\,sen\,x)\,2(-2\cos x+a)}{(1-2a\cos x+a^2)^3}$$

Facendo ora in queste $a=0$, *si ha*

$$f(0)=\frac{dy}{da}=sen\,x\,,$$

$$f'(0)=\frac{d^2y}{da^2}=2sen\,x\cos x=sen\,2x,$$

$$f''(0)=\frac{d^3y}{da^3}=-2sen\,x+2.4sen\,x\cos^2x$$

$$=-2sen\,x+2.4\,sen\,x(1-sen^2x)$$

$$=-2\,sen\,x+8sen\,x-8sen^3x$$

$$=\;2(3sen\,x-4sen^3x)=2sen\,3x.$$

$$f'''(0)=\ldots\ldots\ldots\ldots\,,$$

quindi sostituendo

$$\frac{dy}{da}=sen\,x+a\,sen\,2x+a^2sen\,3x+\ldots\ldots,$$

e integrando

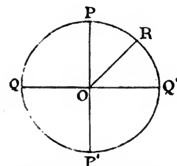
$$y=a\,sen\,x+a^2sen\,2x+a^3sen\,3x+\ldots\ldots:$$

la costante è $=0$, *perchè* $y=0$ *quando* $x=0$. *Se non si voglia usare la serie, si riprenda l'equazione precedente, osservando che il valore di* p *è massimo quando* $x=90°$, *eallora si avrà*

$$sen\,\pi=\frac{r}{D}\,,$$

indicando per π *la parallasse orizzontale. Per tutti i corpi celesti, tranne la Luna nelle ricerche più delicate, può supporsi l'arco eguale al seno, e si avrà*

$$\pi=\frac{r}{D}\,,\ donde\quad p=\pi\,sen\,z.$$



Nelle formole precedenti r *è il raggio terrestre proprio dell'osservatore : ma se questi non sta nell'equatore, il suo raggio sarà diverso dall'equatoriale. Infatti la terra è un'elissoide di rivoluzione, il cui asse minore è il polare* PP', *e il maggiore l'equatoriale* QQ'; *e gli altri raggi sono intermedii. Indicando quindi per* ρ *il raggio equatoriale, e per* π' *la parallasse equatoriale orizzontale, sarà*

$$\pi' = \frac{\rho}{D} = \frac{1}{D} \quad ,$$

poichè il raggio equatoriale ρ *si fa* $= 1$; *e per un altro luogo qualunque l'equazione generale*

$$\pi = \frac{r}{D}$$

diventa

$$\pi = r\pi' ,$$

cioè si ottiene la parallasse orizzontale di un luogo moltiplicando la parallasse orizzontale equatoriale per il raggio terrestre del luogo di osservazione, e quindi

$$\text{sen}\,\pi = r\,\text{sen}\,\pi' ,$$

$$\text{sen}\,p = r\,\text{sen}\,\pi'\,\text{sen}(Z+p).$$

La parallasse agendo nel piano verticale, cambia bensì l'altezza, ma non l'azimut : muta però l'angolo orario e la declinazione degli astri

---

6.

PARTE SECONDA

DEL MOTO DEL SOLE E DELLA LUNA

CAPO I.

Della posizione del piano dell'orbita solare

L'ORBITA *apparente del sole sulla sfera celeste è un circolo massimo. Gli antichi determinarono la posizione di questo circolo mediante i luoghi che occupava fra le stelle la luna ecclissata, e perciò lo chiamarono* Ecclittica *: ma tal verità può assai meglio dimostrarsi da una serie di differenze di ascensioni rette e di declinazioni del sole osservate al meridiano, e si troverà che tra le dette coordinate e la longitudine* $\odot$ *ha luogo l'equazione*

$$\cos\alpha \cos\delta = \cos\odot ,$$

che non può sussistere, fuorchè nel caso del circolo massimo. Questo circolo non essendo altro che la proiezione sulla sfera celeste dell'orbita apparentemente descritta dal sole attorno alla terra, da ciò si ricava che tale orbita sta in un piano. La posizione di questo piano si determina rapporto al piano dell'equatore celeste, mediante i due elementi *della* inclinazione, *e delle intersezioni* o nodi *col medesimo, che chiamansi* punti equinoziali.

Abbiamo veduto sopra (pag. 6) *come si determina prossimamente la inclinazione od obliquità dell'ecclittica rappor*

lo all'equatore per mezzo delle osservazioni solstiziali. Però il vero istante del solstizio, e il vero valore della obliquità si conchiuderà meglio, disponendo in serie i valori osservati in vari giorni prima e dopo il solstizio, mettendoli sotto la forma dell'equazione

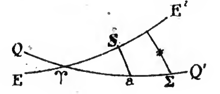
$$\delta = A + Bx + Cx^2 + \ldots\ldots,$$

$$\delta' = A + Bx' + Cx'^2 + \ldots\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

e determinando da più osservazioni i coefficienti $A, B, C, \ldots\ldots$ e poi il massimo della funzione δ rapporto al tempo x.

Conosciuta l'obliquità, si potrà sapere ove stia l'Equatore, e quindi il momento in cui il sole passa per questo piano, ossia trovasi nell'Equinozio. Ma anche qui per maggiore esattezza si dovranno fare le osservazioni alcuni giorni prima e dopo l'Equinozio stesso, e prendere la declinazione del sole; donde sapendo l'obliquità, si avrà facilmente la sua ascensione retta a. Infatti sia QQ' l'Equatore, EE' l'ecclittica; il triangolo sferico $S\Upsilon a$ darà (Cap II. Corol. V. formula d)



$$\tang \delta = \tg \omega \sen a,$$

che darà a. Se oltre il passaggio del Sole S pel meridiano, si prenda anche quello di una stella Σ; l'arco corrispondente alla differenza dei passaggi in tempo, cioè $a\Sigma$, sarà la differenza delle ascensioni rette, ed aggiungendo all'arco $a\Sigma$ l'arco Υa, sarà

$$\Upsilon a + a\Sigma = \Upsilon\Sigma,$$

che è l'ascensione retta assoluta della stella medesima. La de

terminazione adunque delle ascensioni rette assolute delle stelle si fa determinando l'ascensione retta del sole, e aggiungendo la differenza de' passaggi tra il sole e le stelle. Ma è evidente, per quello che si è detto trattando delle ascensioni rette (cap. III) che basta confrontare il sole anche con una sola stella, per dedurne la ascensione retta di tutte le altre.

Ipparco pel primo, confrontando le posizioni di α Vergine osservate dagli Astronomi anteriori colle sue proprie, trovò che il punto di equinozio non era immobile rapporto alle stelle; ma che si moveva con moto contrario all'ordine dei segni, ossia **retrogrado**, in proporzione di circa 40″ all'anno. Più esatte osservazioni danno ora 50″,25. Così la suddetta stella 171 anni avanti Gesù Cristo aveva una longitudine di . . . . 174° 7′ 30″

e nel 1802 la longitudine era. . . . . 201° 4′ 41″

la differenza è di . . . . 26° 57′ 11″

che divisa pel numero di anni 1973 dà il valore suddetto del moto de' punti equinoziali 50″25.

Scoprì inoltre Ipparco che in questo movimento le latitudini delle stelle restavano costanti, variando solo le longitudini, ma che però variano simultaneamente le ascensioni rette e le declinazioni; talchè il movimento del punto equinoziale è congiunto con un movimento generale del cielo, che si fa come se l'asse dell'equatore descrivesse un cono attorno l'asse dell'eclittica, la cui apertura fosse uguale all'obliquità della medesima sull'equatore. Quindi ne nasce che il polo della sfera celeste non resta immobile tra le stelle, ma va continuamente mutando luogo su di un circolo minore del raggio di $23° \frac{1}{2}$; per cui incontra succes-

sivamente varie stelle nel suo giro. Il giro intiero tanto del punto dell'equinozio che del polo nel suddetto circolo di compie in 25000 anni circa. Gli antichi attribuivano il moto non all'asse dell'equatore, ma a quello dell'ecclittica, e per ciò che riguarda le apparenze è lo stesso: ma il fatto fisico procede realmente come abbiamo enunciato sopra.

La posizione adunque delle stelle riferendosi all'equinozio e al polo, che sono mobili sulla sfera celeste, ne segue che le coordinate saranno variabili col tempo. Ma per riconoscere le leggi dei movimenti celesti, è necessario riferire gli astri a punti fissi; e ciò si ottiene, correggendo ogni volta le posizioni trovate, per riportarle così all'equinozio di un tempo determinato considerato come se fosse fisso. L'intersezione dell'equatore coll'ecclittica procedendo contro l'ordine dei segni, tal moto è veramente un moto di regresso rapporto alle stelle fisse; onde giustamente chiamasi Retrogradazione de' punti equinoziali: *ma siccome incedendo a questo modo, l'intersezione va ad incontrare il sole, che procede con moto diretto, quindi accade che l'istante dell'equinozio avviene più presto che non sarebbe avvenuto, se quel punto fosse stato fermo: ed infatti il sole allorchè arriva all'equinozio non ha descritti ancora 360° completi, ma 360°–50"25. Una tale anticipazione adunque è ciò che dicesi* Precessione degli Equinozî.

Anche l'obliquità dell'ecclittica determinata coi solstizî non è costante, e trovasi soggetta a diverse variazioni. La più importante è una di circa mezzo secondo all'anno, la quale però dimostrasi dalla teoria che non sarà indefinita; ma che deve esser periodica ed anche a lungo intervallo, e chiusa nell'escursione di limiti assai ristretti, cioè

di circa 2°. Ora l'obliquità è di 27° 27' 25"; e ai tempi Tchou Kong 1100 anni avanti Gesù Cristo era 23°, 54' 3"; e a quello degli Arabi 827 anni dopo G. C. era 23° 33' 52". Essa diminuirà ancora qualche poco; poi ritornerà a crescere. Quest'angolo è ancora soggetto ad alcune altre variazioni a più breve periodo, che si chiamano di Nutazione, perchè oltre il gran moto nel circolo polare, l'asse della sfera apparisce dotato di altre ondulazioni e movimenti. Il principale di questi si compie in 18 anni; e consiste in una oscillazione che fassi in un circoletto di circa 9" di raggio. L'altro si compie in mezz'anno, ed è di una piccola frazione di secondo. A suo luogo indicheremo la vera cagione di tali movimenti.

Un'altra variazione nell'obliquità e negli equinozi nasce dalla mutazione nello spazio dell'eclittica stessa; la quale non è rigorosamente costante, come credeva Ipparco, ma varia un poco; onde per tal motivo variano anche le latitudini delle stelle: ma tal variazione è piccola, ed era sfuggita agli antichi osservatori. Gli astronomi per i calcoli de' moti lontani de' corpi celesti sogliono adottare come ecclittica fissa quella del 1750: epoca in cui si cominciarono le osservazioni più esatte da Bradley in poi.

Dal detto finora si rileva che il calcolo dell'ascensione retta del sole fatto col metodo indicato al principio di questo capo non può essere esatto, perchè l'obliquità varia da un osservazione all'altra. Se si cerchi pertanto la correzione da applicarsi alla ascensione retta osservata per una variazione $d\omega$ dell'obliquità, si troverà facilmente a questo modo. L'equazione

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \omega} \qquad (m)$$

differenziata darà

$$d\alpha = \frac{-\tan\delta \, d\omega}{\operatorname{sen}^2\omega \cos\alpha} ;$$

e sostituendovi per $\tan\delta$ il valore della primitiva, si avrà

$$d\alpha = -\frac{\tan\omega \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\omega \cos\alpha} d\omega = -\frac{2\tan\alpha}{\operatorname{sen}2\omega} d\omega = A d\omega .$$

Inoltre vi può essere un piccolo errore nella declinazione del sole proveniente o dalla rifrazione, o dalla latitudine, o dalla flessione dello strumento: indicando questo errore per $d\delta$, si calcolerà il suo effetto sulla ascensione retta in modo somigliante. Differenziando la (m) rapporto a δ, si ha

$$d\alpha = \frac{d\delta}{\tan\omega \cos^2\delta \cos\alpha} ,$$

e sostituendovi per $\tan\omega$ il valore dalla primitiva,

$$d\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha \, d\delta}{\operatorname{tg}\delta \cos^2\delta \cos\alpha} = \frac{2\tan\alpha}{\operatorname{sen}2\delta} d\delta = B d\delta .$$

Indicando quindi per α l'ascensione retta della stella, e per S quella del sole, e per t la loro differenza, sarà

$$\alpha = S + t + A d\omega + B d\delta .$$

Da molte osservazioni si caveranno i valori delle correzioni $d\omega$ e $d\delta$: ma dovranno prendersi delle posizioni assai vicine all'equinozio; ed anche quivi l'errore di un secondo in arco in declinazione produce un minuto in tempo sull'istante dell'equinozio.

Per riportare poi le posizioni di una stella da una epoca all'altra molto lontana, è necessario fare una vera trasformazione di coordinate nello spazio a tre assi ortogonali colle solite formole generali della geometria analitica, al quale scopo il moto relativo degli assi si ha dal-

la teoria. Ma se i tempi siano brevi, potrà farsi abbastanza esattamente colle formole differenziali seguenti.

Differenziando le formole

$$\operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\lambda\cos\omega + \operatorname{sen}1\cos\lambda\operatorname{sen}\omega,$$

$$\operatorname{tang}\alpha = \operatorname{tang}1\cos\omega - \frac{\operatorname{tang}\lambda\operatorname{sen}\omega}{\cos 1};$$

avremo per la variazione riguardo ad α ed 1

$$\frac{d\alpha}{d1} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2 1}(\cos\omega - \operatorname{tang}\lambda\operatorname{sen}1\operatorname{sen}\omega)$$

$$= \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2 1\cos\lambda}(\cos\omega.\cos\lambda - \operatorname{sen}\lambda.\operatorname{sen}1\operatorname{sen}\omega.$$

Il valore del binomio entro parentesi può trovarsi mediante il coseno dell'angolo PSP′ (V. figura pag 24), che dà

$$\cos PSP' = \frac{\cos PP' - \cos PS.\cos P'S}{\operatorname{sen} PS\operatorname{sen} P'S} =$$

$$\frac{\cos\omega - \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\lambda}{\cos\delta\cos\lambda}.$$

Ora la terza formola delle (6) e la terza delle (7) (moltiplicando la prima per $\operatorname{sen}\lambda$ e la seconda per $\operatorname{sen}\delta$) danno

$$\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\lambda = \operatorname{sen}^2\lambda\cos\omega + \cos\lambda\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}1\operatorname{sen}\omega,$$

$$\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\lambda = \operatorname{sen}^2\delta\cos\omega - \cos\delta\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\omega:$$

donde sostituendo e riducendo,

$$\cos S = \frac{\cos\omega(1 - \operatorname{sen}^2\lambda - \cos\lambda\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}1\operatorname{sen}\omega)}{\cos\delta\cos\lambda}$$

$$= \frac{\cos\omega\cos\lambda - \operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}1\operatorname{sen}\omega}{\cos\delta} =$$

$$\frac{\cos\omega\cos\delta + \operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\omega}{\cos\lambda}$$

Quindi sostituendo

$$\frac{d\alpha}{dl} = \frac{\cos^2\lambda\cos\delta}{\cos^2\delta\cos\lambda}\left(\frac{\cos\omega\cos\delta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\omega}{\cos\lambda}\right)$$

(1) $$= \cos\omega + \operatorname{tang}\delta\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\omega\ .$$

Similmente trovansi le altre derivate rapporto agli altri movimenti:

(2) $$\frac{d\alpha}{d\lambda} = -\frac{\cos^2\alpha\cos l\operatorname{sen}\omega}{\cos^2 l\cos^2\lambda} = -\frac{\operatorname{sen}\omega\cos l}{\cos^2\delta}\ ,$$

$$\frac{d\alpha}{d\omega} = -\cos^2\alpha\left(\operatorname{tang} l\operatorname{sen}\omega + \frac{\operatorname{sen}\lambda\cos\omega}{\cos l\cos\lambda}\right)$$

$$= -\cos^2\alpha\left(\frac{\cos\lambda\operatorname{sen} l\operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen}\lambda\cos\omega}{\cos l\cos\lambda}\right)$$

e per la 1ª *e* 3ª *delle (6)*

(3) $$= -\frac{\cos^2\alpha\operatorname{sen}\delta}{\cos\alpha\cos\delta} = -\operatorname{tang}\delta\cos\alpha\ .$$

Similmente

(4) $$\frac{d\delta}{dl} = \frac{\cos l\cos\lambda\operatorname{sen}\omega}{\cos\delta} = \cos\alpha\operatorname{sen}\omega\ ;$$

$$\frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{1}{\cos\delta}\left(\cos\lambda\cos\omega - \operatorname{sen} l\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\omega\right)\ ,$$

e per la solita mutazione adoperata di sopra

(5) $$= \frac{\cos\delta\cos\omega + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\delta\operatorname{sen}\omega}{\cos\lambda}\ .$$

$$\frac{d\delta}{d\omega} = \frac{1}{\cos\delta}\left(-\operatorname{sen}\lambda\operatorname{sen}\omega + \operatorname{sen} l\cos\lambda\operatorname{sen}\omega\right)\ ,$$

e per la 2ª *(6)* $$= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\delta}{\cos\delta} = \operatorname{sen}\alpha\ . \qquad (6)$$

La variazione totale $d\alpha$, $d\delta$ *per la variazione di longitudine* dl *si avrà dalle formole* (1) *e* (4) *: le altre servono per le variazioni della nutazione. Le* (1) *e* (4) *si servono comunemente così*

$$d\alpha = m + n \,\mathrm{sen}\, \alpha \,\mathrm{tg}\, \delta ,$$

$$d\delta = n \cos \alpha ;$$

ove $m = 46''{,}028$, $n = 20''{,}064$ pel 1750. A questa deve aggiungersi una piccola correzione ogni secolo o parte notabile di secolo, per la quale vedi i cataloghi.

CAPO II.

Della durata dell'anno e del moto medio e vero del Sole

Il tempo che impiega il sole a percorrere l'ecclittica, e ritornare al medesimo equinozio da cui era partito dicesi Anno. Questo periodo riconducendo tutte le stagioni col medesimo ordine rapporto alle vicende della temperatura e dei prodotti della terra è la base dell'anno civile moderno.

La durata dell'anno si determina facilmente colla osservazione del momento in cui il sole trovasi nell'equinozio, ossia quando l'ascensione retta del suo centro è $= 0°0'0''$. Ciò può eseguirsi determinando il momento dell'equinozio coi precetti esposti nel capo precedente, o anche colla semplice osservazione delle ombre solari; notando quella che corrisponde alla distanza zenitale del sole eguale alla latitudine geografica del luogo. Ma essendo difficile che il

Sole sia nell'equatore al mezzodì, onde è che avrà sempre una certa declinazione, perciò si avrà da fare una parte proporzionale per trovare dietro la declinazione osservata l'istante del passaggio del suo centro per l'equatore. Gli antichi prendevano per punto d'osservazione il passaggio del sole nei solstizî; donde la durata dell'anno così considerata si chiamò tropica; il qual nome si ritiene anche adesso, benchè le osservazioni siano fatte rapporto agli equinozî.

Confrontando tra di loro due equinozî osservati a tempo assai lontano, cioè facendo la somma de' giorni ed ore interposte fra le due osservazioni, e dividendo pel numero dei giri fatti dal Sole, si trovò dagli antichi astronomi che la durata dell'anno era di giorni $365\frac{1}{4}$ circa. Ipparco si accorse che tal durata era troppo lunga, e Tolommeo fissò la correzione a $\frac{1}{300}$, onde restò per molto tempo di giorni $365+\frac{1}{4}-\frac{1}{300}$.

Bessel dietro i calcoli delle recenti osservazioni la fissò a $365^{g}.5^{ore}.48^{m}.47^{sec}.8091$ pel principio del secolo XIX; ma questa durata non è costante rigorosamente; e ogni anno dopo il 1800 deve diminuirsi di 0'.00595. Dalle tavole del Sig: Leverrier l'anno si ricava di $365^{g}.5^{ore}.48^{m}.45^{sec}.1$ pel 1850.

Da questo si vede che l'anno non è formato da un numero esatto di giorni interi, e che dovendo prendere questo periodo per base dell'anno civile, il quale non ammette nel suo calcolo frazioni di giorni, ne viene la necessità delle intercalazioni, per non esser condotti a contare il principio dell'anno a varie ore del giorno.

La regola più semplice di tale intercalazione fu quella

adottata da Cesare e proposta dall'astronomo Sosigene, cioè di fare ciascun anno comune di 365 giorni, ed ogni quarto farlo di 366. Fu anche fissato che il principio dell'anno tropico dovesse regolarsi in modo che l'ingresso del sole nell'equinozio cadesse nel giorno 21 Marzo, e perciò fu intercalato il dì 25 e 26 Febbraio con dire due volte VI. Kalendas Martii; onde questo mese risultò di 29 giorni ad ogni quattro anni.

Gli antichi Egiziani non usavano affatto intercalazione di sorta, e facevano l'anno di 365 giorni soli: onde avveniva che l'equinozio ritardava di un giorno ogni quattro anno, e di un mese ogni 120 anni; e faceva il giro intero dell'anno in 1460 anni. Questo dicesi anno vago, perchè ha il principio mobile rapporto alle stagioni, e il periodo di 1460 anni dicesi periodo Sotiaco, o annus magnus.

Però la correzione giuliana di un giorno ogni 4 anni è troppo forte; infatti l'anno giuliano è fatto di

giorni	365, 6^{ore}, 0^{m}, 0^{sec}, 00
l'anno vero è di giorni	365, 5, 48, 47, 81
la differenza in eccesso è	+ 11, 12, 19
che in 4 anni dà un ritardo di	44. 48. 76

sul corso vero del sole.

Questo ritardo del calcolo in 25 periodi di 4 anni, ossia in cento anni corrisponde ad una anticipazione del luogo vero del sole di 18^{ore} 40^{m} 19^{s}. In capo a tredici secoli questo errore portava l'equinozio vero ad accadere circa 10 giorni prima dell'equinozio calcolato, cioè accadeva agli 11 Marzo invece dei 21.

Questo portò la necessità della correzione fatta da Gre-

gorio XIII, colla quale tolti 10 giorni al mese di Ottobre del l'anno 1582 si rimise l'equinozio vero ai 21 Marzo. E perchè poscia non si rinnovasse lo spostamento, fu fissato che ad ogni secolo si ommettesse nell'anno centenario il bissestile, salvo ad ogni quarto secolo che sarebbe da intercalarsi l'anno centenario e farsi anno comune. Infatti l'omissione del bisestile all'anno secolare ritarda l'equinozio un giorno,

ossia	$24^{or}\ 0^{m}\ 0^{sec}$
ma la differenza era solo di	$18^{or}\ 40^{m}\ 19^{s}$
onde il ritardo è troppo forte di	5 19 41
che in quattro secoli porta	21 18 44 ,

cioè quasi un giorno che dopo 400 anni ricondurrebbe l'equinozio al 22 Marzo. Si faccia adunque al quarto secolo l'intercalazione di un giorno, e resterà il disavanzo soltanto di $2^{or}\ 41^{m}\ 16^{sec}$:
quantità che non forma un giorno che in più migliaia di anni, e che viene molto diminuita dalle piccole incertezze regnanti ancora nel vero valore dell'anno. Così adoperando il valore del Sig: Leverrier si deve diminuire di 18^{m}, 4^{sec}, e resta $2^{or}\ 23^{m}\ 12^{sec}$, alla quale si potrà ovviare con una opportuna intercalazione.

Quindi la seguente regola generale delle intercalazioni: „ ciascun anno il cui numero non è divisibile per quattro sarà comune di 365 giorni; e sarà bissestile di 366 giorni se è divisibile per 4. Fanno eccezione alla regola gli anni secolari; e similmente ogni secolo, il cui numero secolare non sia divisibile per 4 sarà comune: sarà poi bissestile se sia divisibile per 4 „.

La ragione delle intercalazioni si vede a colpo d'occhio nella seguente tavoletta, ove le ore sono espresse inde

cimi di giorno:

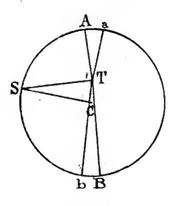
Anno Giuliano assunto	$365^{g}.2500$
Anno vero	365.2422
Eccesso	+ 0.0078
Moltiplicato per	× 100
Dà in un secolo	+ 0.7800
Si lascia un giorno	— 1 0000
Si ha un disavanzo di	— 0.22
Dopo 4 secoli	× 4
Arriva a	— 0.88
Si aumenta un giorno	+ 1.00
Resta un eccesso di	+ 0.12

La durata dell'anno tropico fissata rapporto all'equinozio è diversa da un intera circonferenza considerata sulla sfera celeste di tutto l'arco di 50".25, di cui si sposta in un anno l'equinozio stesso. Quindi arrivato il sole all'equinozio deve ancora percorrere un arco di 50"25 per fare l'intera circonferenza rapporto alle stelle fisse, il che porta l'intero giro, che dicesi **rivoluzione siderale**, ad essere di 365^{g}, 6^{ore}, 9^{m} $10^{sec}75$. Di questa rivoluzione si fa uso nei calcoli delle orbite planetarie; per l'uso comune e civile sempre si adopera la rivoluzione tropica, che si considera anch'essa di 360°.

Dividendo l'intera circonferenza pel numero dei giorni trovati dell'anno tropico, si ha il moto medio diurno del sole in longitudine, che risulta di 0° 59' 8"33. Questo è l'arco che il sole dovrebbe descrivere ciascun giorno sull'ec–

clittica, se esso si movesse in un circolo con moto uniforme. Ora si trova che il suo moto in longitudine non è punto tale. Fino da' suoi tempi trovò Ipparco che il tempo impiegato dal sole a passare dall'equinozio di Primavera a quello di Autunno, era più lungo di 7 giorni di quello che impiegava a passare dall'equinozio di Autunno a quello di Primavera: ora gli archi sono in ambedue i casi 180°, e la differenza è troppo notabile per attribuirsi ad errore di osservazione. Coll'uso degl'istromenti moderni più accurati si trova che presso i primi di Gennaio l'arco diurno descritto dal sole in longitudine è di 61', 10".08, mentre ai primi di Luglio è solo di 57'.11".52. In modo che facendo due tavole, una delle longitudini medie, cioè quali dovrebbero essere, se il moto del sole nell'ecclittica fosse uniforme, e l'altra quali realmente si osservano, si trovano questi moti divergere sistematicamente nelle varie parti dell'anno.

Gli antichi per ispiegare tali divergenze imaginarono l'ipotesi dell'eccentrico, cioè che la terra non fosse nel centro della curva descritta dal sole attorno ad essa; ma che fosse invece in T, stando il centro dell'orbita solare in C. Attesa la piccola eccentricità TC, e la imperfezione delle antiche osservazioni, questa ipotesi rappresentava assai bene entro i limiti dell'esattezza delle osservazioni stesse i moti solari, ma non è più compatibile colle recenti osservazioni. Fin dal suo tempo Keplero dimostrò che l'ipotesi degli eccentrici



non poteva rappresentare l'orbita dei pianeti, e trovò che le orbite non erano circoli eccentrici, ma ellissi in un cui foco era il Sole.

Dimostrasi poi facilmente che i moti angolari del sole veduti dal la terra non solo non sono uniformi apparentemente, ma realmente sono tali anche nell'orbita stessa. Infatti si prendano sui punti opposti dell'orbita di massima e minima celerità due archi $Aa = a$, $Bb = b$ eguali e descritti in tempi eguali: se questi apparissero disuguali per la mera distanza diversa, il più vicino apparirà più grande dell'altro in ragione inversa semplice delle due distanze r, r'; onde avrà luogo la proporzione

$$a : a' = r' : r.$$

Il diametro del sole dà il modo di calcolare i rapporti $r : r'$; perchè se venga misurato nei due punti opposti dell'orbita, si ha da esso

$$r : r' = D' : D,$$

donde dovrebbe anche sussistere

$$a : a' = D : D';$$

ora si trova dall'osservazione, che per gli archi descritti in tempi uguali non ha luogo tale proporzione, ma invece l'altra

$$a : a' = D^2 : D'^2,$$

cioè si ha

$$a : a' = r'^2 : r^2;$$

la quale porta alla conseguenza, che

$$\frac{ar^2}{2} = \frac{a'r'^2}{2}:$$

ove ciascun membro esprime l'area di due settori eguali, descritti in tempi eguali; e quindi si conchiude che in tempi disuguali le aree descritte dal raggio vettore del Sole sono proporzionali ai tempi. Questa è la prima legge detta di Keplero; perchè scoperta, benchè per altra via, da questo Astronomo. Lasciata pertanto da parte la teoria delle orbite circolari ed eccentriche, daremo il modo di calcolare la posizione del Sole nell'ellisse.

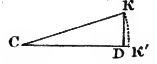
8.

CAPO III.

Teoria del moto ellittico del Sole

DIMOSTRATO *che ebbe Keplero che le orbite dei pianeti erano ellissi, e che il loro moto non era uniforme, i metodi anteriori usati per determinare le posizioni de' pianeti nelle orbite loro, e quindi anche quella del Sole, erano inutili, non essendo più gli archi proporzionali ai tempi. Però siccome le aree sono a questi proporzionali, questa proporzionalità serve di base al calcolo ellittico nel modo che passiamo ad esporre: ma prima è mestieri premettere alcuni teoremi sulla ellisse.*

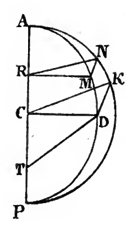
Lemma I. — *Sia* CK *una retta inclinata di un angolo* $\varphi = KCD$ *: la proiezione* CD *sarà* $= CK \cos\varphi$ *, e pel principio degli indivisibili si potrà estendere questa proposizione anche alla proiezione di un area, i cui punti siano corrispondenti ad un altra proiettata ed inclinata di un angolo* φ *; potendo quest'area concepirsi formata di tante linee o rettangoletti paralleli, e tutti inclinati egualmente.*

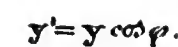


Lemma II. *Sia un circolo* AKP *inclinato sul piano* ADP *di un angolo* φ *: tutti i punti della circonferenza proiettati daranno una curva che è l'ellisse: infatti per una ordinata qualunque si ha*

$$RM = RN \cos\varphi,$$

ossia





Ma nel circolo di raggio a, $y^2 = (a^2 - x^2)$, *e inoltre se si prenda l'ordinata del centro, chiamando* b *la sua proiezione, che è l'asse minore dell'ellisse, si ha*

$$CD = CK \cos\varphi\,,$$

$$b = a\cos\varphi \quad , \quad \cos\varphi = \frac{b}{a}\,;$$

quindi sostituendo e quadrando, sarà

$$y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

equazione all'elisse.

Lemma III. — *Fatto centro nel vertice dell'asse minore dell'ellisse, si tagli sull'asse maggiore della medesima una porzione* CT; *sarà* $\overline{TD}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{CT}^2$;

la porzione CT *si può sempre esprimere per il semiasse maggiore moltiplicato per una frazione* e; *onde si avrà dalla precedente equazione*

$$a^2 = b^2 + e^2a^2 \quad , \quad b = a\sqrt{(1 - e^2)}\,.$$

Dicesi e *l'eccentricità, e* T *il foco dell'ellisse: di qui poi, e dal lemma precedente si ha*

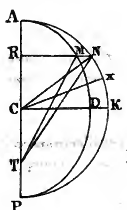
$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2 = \cos^2\varphi\,,$$

$$e^2 = 1 - \cos^2\varphi = \operatorname{sen}^2\varphi \text{ , ossia } e = \operatorname{sen}\varphi:$$

cioè l'eccentricità è il seno dell'angolo di proiezione dell'ellisse generatrice del circolo.

Corollario. — *E' evidente che le proporzioni suddette tra le linee del circolo e dell'ellisse sussistono anche quando il piano del circolo, dopo la proiezione sotto l'angolo φ, si concepisse venire a coincidere sul piano girando attorno alla linea* AP; *nel qual caso diventerebbe circolo circoscritto.*

Ciò premesso, sia AMDP *la metà dell'ellisse descritta dal Sole: una retta qualunque* TM *condotta dalla terra* T *al sole in* M *dicesi* raggio vettore *del sole. L'estremità dell'ellisse* A *più lontana dalla terra si dice* Apogeo, *e la più vicina* P Perigeo. *Sull'asse* AP *si imagini un circolo circoscritto all'ellisse* ANKP. *Su questo circolo si imagini un sole fittizio che lo percorra con moto uniforme, e in egual tempo che il sole vero descrive la mezza ellisse* ADP: *in modo che partendo il sole vero insieme col sole fittizio dal punto* A, *si ritrovino ambedue insieme in* P. *Il sole fittizio andando con moto uniforme si troverà in* x *mentre il sole vero sta in* M. *L'angolo* ATM *compreso tra l'asse maggiore e il raggio vettore dell'ellisse contato dal perigeo dicesi* anomalia vera. *L'angolo* ACx *compreso fra il diametro del circolo circoscritto e il raggio condotto al posto del sole fittizio, dicesi* Anomalia media. *Se si prolunghi l'ordinata dell'ellisse fino ad incontrare il circolo circoscritto in* N, *e si congiunga* CN, *l'angolo* NCA *dicesi* anomalia eccentrica.



Per determinare ad un tempo qualunque la posizione del sole nella sua orbita, si farà a questo modo. Siccome

è noto il suo moto medio diurno, potremo sempre mediante questo conoscere l'arco Ax; perchè se è noto quando il Sole si trova in un altro punto P della sua orbita, moltiplicando il moto medio 0°59',8''.... per il numero n de' giorni scorsi, avremo l'arco Ax, che sarà eguale evidentemente all'aumento di longitudine media fra le due epoche. Avuto ACx, ecco come si potrà avere l'angolo di anomalia vera ATM. Sia t il tempo, in cui il pianeta fittizio percorre il settore ACx, mentre il vero percorre ATM, e T il tempo periodico in cui si descrive l'intero circolo e l'intera ellisse: per la legge del moto uniforme si avrà

$$T : t = \text{Circolo} : \text{Settore } ACx\,;$$

e similmente per la legge delle aree proporzionali ai tempi nella ellisse sarà

$$T : t = \text{Ellisse} : \text{Settore } ATM\,.$$

Quindi

$$ACx : ATM = \text{Area del } \tfrac{1}{2} \text{ Circolo} : \text{Area di } \tfrac{1}{2} \text{ Ellisse}$$

e pel lemma 1°.

$$= CK : CD = RN : RM$$

$$= \text{Area } ATN : \text{Area } ATM\,.$$

Quindi dagli estremi di queste ragioni si ottiene

$$ACx \,.\, ATM = ATM \,.\, ATN\,,$$

ossia

$$\text{Area } ACx = \text{Area } ATN = \text{Area } ACN + \text{Area } NCT.$$

L'ultima di queste aree è un triangolo che ha per altezza $NR = CN \operatorname{sen} ACN$, e per base CT: quindi la sua area sarà eguale $\frac{1}{2}\,CT.NR$: le altre due sono settori circolari; dunque sarà

$$\frac{1}{2}\,Cx \text{ arc } Ax = \frac{1}{2}\,CN \text{ arc } AN + \frac{1}{2}\,CT.CN \text{ sen } ACN .$$

Se si faccia il raggio $Cx = CN = a$; *e sia* z *l'anomalia media* ACx, x *l'anomalia eccentrica* ACN , *avremo*

$$\frac{1}{2}a.a.z = \frac{1}{2}a.ax + \frac{1}{2}a^2 e \text{ sen } x ,$$

donde $$z = x + e \text{ sen } x , \qquad (a)$$

ossia $$z = x - e \text{ sen } x ;$$

contando le anomalie medie dal perigeo, e mettendo $180 + x$ *come ora si è solito di fare.*

L'arco x *trovato sinora non è che un angolo ausiliare; ma ottenuto* x , *si calcolerà il raggio vettore* r *e l'anomalia vera* v *al modo seguente. Seguitando a computare le anomalie dal punto* A *per comodità di calcolo , il triangolo* TMR *rettangolo in* R *darà*

$$\overline{TM}^2 = \overline{TR}^2 + \overline{MR}^2 = (CT + CR)^2 = \left(\frac{RN.CD}{CN}\right)^2 ;$$

perchè

$$RM : RN = CD : CK = CD : CN ;$$

ossia, facendo il semiasse minore dell'ellisse $= b$,

$$r^2 = a(e + \cos x)^2 + (b \text{ sen } x)^2 ,$$

che sviluppata e ridotta, ponendo per b *il suo valore* $a^2(1 - e^2)$, *dà*

$$r^2 = a^2(1 + 2e\cos x + e^2 \cos^2 x) ,$$

e conseguentemente

$$r = a(1 + e \cos x) : \qquad (b)$$

contando l'anomalia dal perigeo , si avrà $x = 180 + x$, *e quindi*

$$r = a(1 - e\cos x), \qquad (b')$$

che darà il raggio vettore per l'anomalia eccentrica.

Per avere l'anomalia vera ATM $= v$, *il triangolo* TRM, *fatto* $a = 1$, *ci somministra*

$$\operatorname{sen} v = \operatorname{sen} RTM = \frac{RM}{TM} = \frac{b \operatorname{sen} x}{r} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x}{1 + e\cos x},$$

$$\cos v = \frac{RT}{TM} = \frac{e + \cos x}{1 + e\cos x}. \qquad (m)$$

Ora si ha in generale dalla trigonometria

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} v = \frac{1 - \cos v}{1 + \cos v}:$$

sostituendo per $\cos v$, *e riducendo, si cava*

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} x \qquad (c)$$

relazione cercata tra x *e* v. *Questa formola può render si più comoda al calcolo logaritmico, prendendo*

$$e = \operatorname{sen} \varphi.$$

Allora

$$\frac{1-e}{1+e} = \frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{1 + \operatorname{sen} \varphi} = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi);$$

quindi

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x.$$

Le tre equazioni (a)(b)(c) *risolvono completamente il problema; cioè data l'anomalia media, danno il* raggio vettore, *e l'* anomalia vera, *e quindi la longitudine. Infatti contando le anomalie dal perigeo, si supponga noto in cielo il luogo del perigeo stesso, e sia la sua longitudine* $= \pi$: *sia* n *il numero dei giorni scorsi dopo il passaggio del sole per esso, e* t *il moto medio diurno: avremo*

$$nt = z = x - e\,sen\,x\,.$$

Sciolta questa equazione relativamente ad x, poichè si suppone noto e, si avrà v dalla (c); quindi aggiungendo a π l'anomalia vera v, il valore $\pi + v$ sarà la longitudine vera del sole per l'epoca cercata. Il raggio vettore si avrà dalla (b), e potrà esprimersi anche coll'anomalia vera, mediante l'equazione polare dell'elliese riferita al foco, che è la seguente

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}\,,$$

contando v dall'apogeo, e che facilmente deducesi dalle equazioni superiori: infatti dalla (m) si ha

$$\cos x = \frac{\cos v - e}{1 - e\cos v}\,;$$

quindi sostituendo e riducendo, si avrà

$$r = a(1+e\cos x) = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos v}\,;$$

e contando dal perigeo

$$r = a(1-e\cos x) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}\,.$$

La difficoltà pratica di questo problema sta nella soluzione dell'equazione

$$z = x - e\,sen\,x\,,$$

che non può aversi se non o per mezzo indiretto di falsa posizione, o per via delle serie, le quali sono pochissimo convergenti se l'eccentricità dell'orbita è alquanto grande. Per risolvere questa equazione, si comincerà dal ridurre e in secondi di arco, moltiplicandola per R″: allora nell'equazione

$$z = x - \frac{e}{sen\,1''}\,sen\,x \;\ldots.. \qquad \text{(P)}$$

tutto essendo ridotto ad archi di circolo, si supporrà per

x un valore prossimo al vero, che potrà essere lo stesso valore noto di z, che indicheremo con (Z), allora sarà

$$(x) = z + e'' sen(Z).$$

Il valore di x dedotto da questa equazione non sarà certamente il vero, poichè l'equazione $z = x - \frac{e''}{sen\,1''}\, sen(x')$ non resterà soddisfatta; ma sarà più prossimo che non era lo (Z); si adoprerà quindi questo valore nell'equazione (p), e si avrà un altro valore (x')

$$(x') = z + e'' sen(x),$$

il cui secondo membro non sarà nemmeno esso il vero; ma un altro (x') meno differente da esso che x, e così via progredendo, si rifarà il calcolo, finchè si trovi uno $(x^{(n)})$ che dia

$$(x^{(n)}) - e'' sen(x^{(n)}) = z,$$

e questo sarà il valore cercato dell'anomalia eccentrica. Il problema in cui, data l'anomalia media, si cerca l'eccentrica, dicesi problema di Keplero, che fu il primo a proporlo.

Pel sole però questi calcoli possono risparmiarsi, prevalendosi della circostanza che l'eccentricità dell'orbita solare è assai piccola; onde si può avere in serie molto convergente la differenza tra l'anomalia vera e la media. Infatti abbiamo veduto, che l'area ACX = ATM: ora l'area $ATN = \frac{ATM}{\cos\varphi}$; dunque $ATM = ACX \cos\varphi = ACX \frac{b}{a}$; e per un tempo infinitesimo i settori infinitesimi corrispondenti essendo uguali daranno l'equazione

$$\frac{r^2 dv}{2} = \frac{a^2 dz\, b}{2a}$$

e, fatto $a = 1$, essendo $b^2 = 1 - e^2$,

$$dz = \frac{dv\, r^2}{b} = \frac{b^3 dv}{(1 + e\cos v)^2} =$$

$$=(1-e^2)^{\frac{3}{2}}(1+e\cos a)^{-2}du$$

sviluppata in serie, alzando alle potenze i binomii, mediante la formola Newtoniana, e poscia riducendo le potenze degli archi ad archi multipli. Tale sviluppo poi integrato darà

$$z-v=-2e\,\text{sen}\,v+\left(\frac{3}{4}e^2+\frac{1}{8}e^4\right)\text{sen}\,2v-\frac{1}{3}e^3\text{sen}\,3v+\frac{5}{3}e^4\text{sen}\,4v+\ldots,\ (E)$$

trascurando le potenze di e *superiori alla quarta. Questa serie rovesciata col metodo del regresso delle serie darà*

$$v=z-\left(2e-\frac{1}{4}e^3\right)\text{sen}\,z+\left(\frac{5}{4}e^2-\frac{11}{14}e^4\right)\text{sen}\,2z-\frac{13}{12}e^3\text{sen}\,3z+\frac{103}{96}e^4\text{sen}\,4z:$$

le anomalie qui sono contate dal perigeo. Queste serie non sono abbastanza convergenti se non quando e *è assai piccola.*

La differenza delle due anomalie $u-z$ *esprime la quantità che bisogna aggiungere o sottrarre all'anomalia media per ottenere la vera, e chiamasi dagli astronomi* equazione del centro.

Chiamandosi da essi generalmente equazione *qualunque correzione da farsi al valor medio di una quantità per ridurla eguale al valor vero corrispondente, quindi è che quella differenza chiamasi equazione. Il nome poi di equazione al centro è stato trasmesso dall'uso antico di ridurre il moto apparente veduto dalla terra, supposta fuori del centro del circolo, al moto uniforme che si vedrebbe dal centro stesso.*

CAPO IV.

Elementi dell'orbita solare

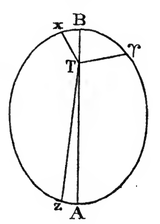
MEDIANTE le formole del capo precedente, siamo in istato da poter fissare la posizione del Sole nella sua ellisse per un tempo qualunque; ma prima bisognerà determinare il valore di alcune costanti, che entrano in tutte le formole; cioè il semiasse, l'eccentricità, e la posizione in cielo dell'asse maggiore dell'ellisse, ossia il luogo del Perigeo relativamente all'equinozio; e il moto medio. Non occorre determinare il valore assoluto del semiasse trasverso, perchè si prende sempre per unità: il moto medio è già noto dall'osservazione degli equinozi.

L'eccentricità, la longitudine del perigeo, l'asse maggiore ed il moto medio, diconsi gli elementi ellittici dell'orbita.

Dalle osservazioni del diametro del sole e della sua velocità apparente può sapersi a un dipresso in qual'epoca dell'anno esso sia prossimo alla linea degli apsidi. Si facciano adunque parecchie osservazioni presso di questi due punti, onde poter determinare esattamente il moto diurno vero del sole in quelle vicinanze. Questo sarà presso il perigeo nel principio di Gennaio 61'.10",08 e presso l'apogeo nel principio di Luglio di 57'.11".82. Ciò preparato, si determinerà la posizione della linea degli apsidi a questo modo.

E' proprietà di questa linea di dividere per mezzo in due parti uguali l'orbita ellittica; onde il sole nel passare dal-

l'apogeo al perigeo deve impiegare la metà del tempo della sua rivoluzione periodica, e deve descrivere 180°. *Sia dunque* $\Upsilon TB = \pi$ *la longitudine del perigeo;* $\Upsilon Bx = L$ *la longitudine vera del sole osservata presso il perigeo, ed* $\Upsilon Bxz = L'$ *quella osservata presso l'apogeo. Sia anche l'arco* $Bx = x$, *e* $Az = z$. *Dall'osservazione si conoscerà l'angolo* $xTz = \Upsilon Bz - \Upsilon Bx$, *differenza delle due longitudini* L *ed* L' *osservate; ma deve essere*



$$BTx + xTz + zTA = 180°,$$

dunque sostituendo otterremo

$$L' - L + x + z = 180.$$

Se a *e* b *sono le velocità del sole presso l'apogeo ed il perigeo, ossia il suo moto diurno, avremo ancora che il tempo che il Sole impiegherà a percorrere gli archi* x *e* z *sarà*

$$t = \frac{x}{b} \quad , \quad t' = \frac{z}{a};$$

perchè per un piccolo spazio tali moti sono sensibilmente uniformi. Ma noi dobbiamo avere il tempo in cui il sole scorre l'arco $BxzA = \frac{1}{2}R$, *essendo* R *la durata della sua rivoluzione siderale; dunque chiamando* T *il tempo che impiega a descrivere l'angolo* xTz, *cioè l'intervallo delle due osservazioni, sarà*

$$t+t'+T=\frac{1}{2}R,$$

ossia

$$T+\frac{x}{b}+\frac{z}{a}=\frac{1}{2}R:$$

da queste due equazioni si ha il valore delle due incognite x *e* z. *Quindi la longitudine del perigeo sarà*

$$\pi=L-x,$$

e quella dell'apogeo

$$180^\circ+\pi=L'+z.$$

Il valore di R *qui adoperato è stato supposto quello della rivoluzione siderale, e la longitudine* L' *si è supposta corretta dallo spostamento dell'equinozio accaduto nell'intervallo di tempo che separa le osservazioni, onde*

$$L'=\text{longitudine vera}-\text{Precessione equinoziale}=\odot-\frac{50''.1}{365.25}T.$$

Se si determini il perigeo del sole per due epoche assai distanti relativamente alle stelle fisse, si trova che questo punto non si conserva immobile sulla sfera celeste, ma va avanzando secondo l'ordine dei segni circa 12" all'anno. Dall'altra parte il punto di ♈ si muove sull'ecclittica indietreggiando contro l'ordine dei segni di 50" l'anno; quindi il perigeo relativamente all'equinozio si sposta di 62" annualmente secondo l'ordine dei segni.

Volendo adunque determinare con precisione colle osservazioni precedenti il sito del perigeo, sarà necessario correggere la longitudine della seconda osservazione dal movimento che ha fatto l'apogeo durante l'intervallo delle osservazioni. — La longitudine del Perigeo al principio del 1800 era $\pi=279^\circ.30'.8''.30$.

Trovato così il luogo del perigeo, la sua longitudine sarà quella del sole quando esso si trovava nel perigeo: e conseguentemente potrà calcolarsi l'istante in cui il sole fu perigeo, e da questo punto si cominceranno a contare tutte le anomalie.

In generale poi la longitudine vera del sole Lv *è sempre uguale alla longitudine del perigeo più l'anomalia media, cioè*

$$L(v) = \pi + v\,;$$

e la longitudine media è uguale alla longitudine del perigeo più l'anomalia media

$$L(m) = \pi + z\,.$$

e siccome $v = z + E$, *essendo* E *l'equazione al centro (V. capo precedente) così, mettendo per* z *il suo valore* nt, *ove* n *è il moto medio diurno del sole, sarà sempre la longitudine vera*

$$L(v) = \pi + nt + E\,.$$

Tra le cose che è necessario sapere per cominciare a fare il computo delle anomalie, abbiamo veduto che vi è l'istante in cui il sole passa pel perigeo: invece di questa quantità sogliono gli astronomi usare la longitudine media del sole al principio dell'anno, che da essa dipende, e che si suol chiamare Epoca. *Questa pel principio del 1800 al meridiano di Parigi si trova essere* $= 279^\circ, 54', 1''.36$. *Il principio dell'anno nelle tavole si pone communemente al mezzodì del 31 Decembre, che si conta come se fosse zero di Gennaio.*

La durata della rivoluzione solare contata tra due successivi ritorni al perigeo si dice Anno Anomalistico. *Es*

so è più lungo dell'anno tropico di tutto il tempo che il sole impiega a percorrere i 62" che misurano il moto dell'apogeo relativamente all'equinozio di ariete, il qual tempo è di 25' 10" di tempo medio; quindi la durata dell'anno anomalistico
$= 365^g. 6^{ore}\, 14^m\, 6^{sec} = 365^g, 25979$.

L'eccentricità può trovarsi dietro il massimo e il minimo diametro osservato, i quali corrispondono alle distanze

$$r_{,} = a(1+e) \qquad , \qquad r_{,,} = a(1-e),$$

che dà

$$e = \frac{1}{a}\left(\frac{r_{,} - r_{,,}}{2}\right);$$

ma più precisa sarà tale determinazione dedotta dalla massima equazione del centro.

Abbiamo veduto che in generale

$$(n) \qquad r^2 dv = a^2\sqrt{1-e^2}\, dz \;;$$

se l'equazione del centro sia $= E$, *sarà*

$$E = v - z\,.$$

Quando l'equazione del centro è massima, il moto medio eguaglia il vero, perchè allora è l'istante che uno dei moti diventa maggiore o minore dell'altro. In questo punto deve essere

$$dE = dv - dz = 0\,;$$

donde $dv = dz$: *quindi l'equazione* (n) *dà*

$$r = a\left(1 - e^2\right)^{\frac{1}{4}} \quad :$$

sostituendo questo valore di r *nell'equazione*

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos v},$$

si ricaverà

$$\cos v = -\frac{1-(1-e^2)^{\frac{3}{4}}}{e};$$

da questa formola si avrà e ogniqualvolta si conosca l'anomalia vera corrispondente alla massima equazione del centro, cioè all'istante in cui $dz = dv$.

La eccentricità ora trovasi essere $= 0,016792$ *: e la massima equazione del centro* $= 1° \; 35' \; 26''$*; ma determinandone il suo valore per epoche molto rimote, si trova che questi valori non sono costanti, ma che vanno scemando alquanto, onde l'ellissi si accosta al circolo. Questa eccentricità, benchè piccola, pure eguaglia un milione e mezzo di miglia; quantunque non sarebbe che di 16 millimetri in un ellisse di un metro di diametro. Essa va diminuendo 14 leghe per anno, ossia di 0,0000416612 del semiasse.*

In virtù dell'eccentricità il sole è più vicino a noi di circa tre milioni di miglia l'inverno che l'estate, e il calore diretto che cade sulla terra è circa $\frac{1}{16}$ *più forte nel perigeo che nell'apogeo. La temperatura però di ciascun luogo dipende principalmente dalla distanza zenitale del sole.*

Gli elementi così trovati non possono essere che una prima rozza approssimazione; perchè ogni osservazione è soggetta all'influenza di tutti gli errori che stanno negli altri elementi. Di più vi sono gli effetti delle perturbazioni, che alterano sensibilmente la posizione del piano dell'orbita solare apparente; e le osservazioni devono essere spogliate da' loro effetti prima di assoggettarle al calcolo, il che come si possa fare sarà in altro luogo accennato.

Siccome la teoria ellittica rappresenta i moti del sole con la precisione stessa delle osservazioni, quindi resta dimostrata la scoperta di Keplero, che ~~il sole~~ la terra descrive una

ellissi attorno al sole, nel cui foco sta la terra medesima.

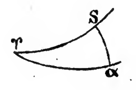
Conosciuti che siano gli elementi dell'orbita solare, riuscirà facile calcolare i luoghi del sole, e il fissare i rapporti tra il tempo solare vero e il tempo solare medio, del quale abbiamo già dato un cenno nella parte prima, ma che ora potranno intendersi con maggior chiarezza.

Si disse ivi che tre specie di tempo distinguono gli astronomi; cioè siderale, solare vero, e solare medio. 1.° Nel tempo siderale il giorno è misurato dall' intervallo di due appulsi consecutivi del punto di ariete al meridiano: questo non potendosi regolare che dietro il ritorno della medesima stella al meridiano, si deve correggere dell'effetto della precessione degli equinozi. Questo tempo è quello in cui la terra fà una rotazione attorno al proprio asse, meno l'effetto della precessione stessa in ascensione retta. L'ora siderale si ha facilmente dall'angelo orario di una stella qualunque, aggiungendo il suo valore all'ascensione retta della stella: cioè

$$T_s = h + \alpha \ast ;$$

se la stella sia a levante, si avrà h negativo.

2.° Il Giorno solare vero è misurato da due appulsi successivi del centro del sole pel meridiano. Questo è vario per due cagioni distinte, che fanno variare l'ascensione retta del sole: la prima è l'ineguaglianza del suo moto sull'eclittica; e la seconda l'obliquità dell' eclittica sull' equatore.



Infatti stando il sole S nelle vicinanze dell' equinozio ♈, la sua ascensione retta ♈α sarà sempre minore della longitudine ♈S; essendo

$$\tan ♈\alpha = \operatorname{tg} ♈S \cos\omega :$$

[illegible] nelle vicinanze [illegible] di [illegible] S S' [illegible] si proiettano sull'equatore in archi maggiori, essendo i due circoli di declinazione più convergenti al polo presso l'ecclittica che all'equatore.

Per liberarsi da tante irregolarità solari, gli astronomi ebbero ricorso al tempo detto medio.

§. Il Giorno solare medio è misurato dall'intervallo che passa tra due appulsi successivi di un sole fittizio che scorre con moto uniforme sull'equatore: questo artifizio astronomico può facilmente concepirsi al modo seguente. Oltre il sole vero S che con moto vario percorre l'ecclittica della sua ellissi, si immagini un secondo sole S' che scorra l'ecclittica stessa con moto uniforme uguale al moto medio del sole vero; e che partendo dal Perigeo col sole vero, con esso vi ritorni nel corso di un anno anomalistico, appunto come si è fatto per trovare le leggi del moto ellittico. S'immagini finalmente un terzo sole S'' il quale percorra l'equatore con moto pure uniforme uguale al moto medio del sole S', e che questo terzo sole parta dal punto d'equinozio quando vi passa il sole medio S'. Il tempo medio astronomico è misurato dagli appulsi al meridiano di questo terzo sole fittizio. Ma perchè questo sole non può vedersi, gli astronomi suppliscono a ciò calcolando antecedentemente di quanto il sole vero S deve precedere o seguire il sole medio S'', e quindi osservato il sole vero e dedottane la differenza pre-

detta, ottengono il passaggio del sole fittizio, e il tempo di questo passaggio è quello che dev'essere indicato da un orologio regolato a tempo medio.

Risulta da questo artifizio 1.° che l'ascensione retta del sole medio S'' che sta sull'equatore è sempre uguale alla longitudine media del Sole S' che sta sull'ecclittica, ma è necessariamente diversa tanto dall'ascension retta vera, cha dalla longitudine vera.

2.° Che l'ascensione retta vera del sole è la misura del tempo detto vero, e che l'ascensione retta media è la misura del tempo medio.

3.° La differenza tra il tempo vero e il tempo medio dicesi equazione del tempo. Siccome il sole medio ora precede ora segue il sole vero, così l'equazione del tempo ora sarà additiva al tempo vero, ora sottrattiva. Essa in capo all'anno diviene nulla quattro volte. (Veggasi la tavola)

L'artificio esposto equivale a prendere per principio del tempo medio assoluto il momento in cui ha luogo il passaggio del sole pel perigeo, nel quale istante tutte le anomalie x, z, v sono $= 0$. Se il perigeo coincidesse col punto di equinozio, il sole vero e il sole medio che serve al computo delle anomalie medie sarebbero nel medesimo istante nell'equinozio, ma siccome il perigeo dista dal l'equinozio di un arco π, si prende sull'equatore partendo dall'equinozio ♈ un arco eguale al valore che ha π sull'ecclittica, che sarà l'ascensione retta media del sole quando sta in perigeo.

Per calcolare l'equazione del tempo è dunque necessario

1.° Trovare l'ascension retta media; il che si fa facil-

mente colle tavole con cui si ha la longitudine media, perchè una è eguale all'altra, e si ha

$$\mathrm{AR}(m) = n^s(0^\circ, 59', 8''\ldots\ldots) - \pi .$$

2.° Bisogna trovare l'ascension retta vera: questa si ha dalla longitudine vera per l'equazione

$$\operatorname{tang} \mathrm{AR}_v = \operatorname{tang} \odot \cos \omega \;;$$

ovvero per mezzo della differenza che passa tra il cateto (longitudine) e l'ipotenusa (Ascension retta) del triangolo sferico rettangolo formato dall'ecclittica coll'equatore: si ha infatti, facendo $\cos\omega = n$,

$$\operatorname{tang}(\mathrm{AR}_v - \odot) = \frac{\operatorname{tang} \mathrm{AR} - \operatorname{tang} \odot}{1 + \operatorname{tg} \mathrm{AR} \operatorname{tg} \odot} = \frac{(n-1) \operatorname{tg} \odot}{1 + n \operatorname{tg}^2 \odot} = \frac{(n-1) \operatorname{sen} \odot \cos \odot}{\cos^2 \odot + n \operatorname{sen}^2 \odot}$$

$$= \frac{(n-1) \operatorname{sen} \odot \cos \odot}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\odot + \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \cos 2\odot} = \frac{(n-1) \operatorname{sen} 2\odot}{(n+1) - (n-1) \cos 2\odot} = \frac{\frac{n-1}{n+1} \operatorname{sen} 2\odot}{1 - \frac{n-1}{n+1} \cos 2\odot};$$

se si faccia $\frac{n-1}{n+1} = a$, ossia $= -\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\omega$, e si confronti questa formola con quella della pag. 39, si avrà

$$\mathrm{AR}_v = \odot - \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}\omega \operatorname{sen} 2\odot}{1''} - \frac{\operatorname{tg}^4 \frac{1}{2}\omega \operatorname{sen} 4\odot}{2''} + \cdots ,$$

il cui secondo membro esprime la riduzione all'ecclittica.

Finalmente sarà l'equazione del tempo

$$\mathrm{E} = \mathrm{AR}_m - \mathrm{AR}_v .$$

Si trova dai calcoli più accurati che un giorno siderale

è	=	23$^{\text{or}}$,	56$^{\text{min}}$,	4$^{\text{sec}}$,	0906	di tempo solare medio.
1$^{\text{ora}}$ di tempo siderale . .	=	0	,59	,50	,1704	
1$^{\text{min}}$ . . . id	=	0	,0	,59	,8362	

CAPO V.

Della Luna

LA LUNA è dopo il sole il corpo più interessante per gli abitatori della terra: le sue variazioni di forma e di luce dette fasi formarono e formeranno sempre un calendario naturale per i popoli rozzi e agricoltori; e quindi i suoi periodi formarono uno de' principali studi dell'antichità.

La Luna ha per suo centro di moto la terra, e il suo spostamento sulla superficie celeste è sensibile anche in poche ore di osservazione: durante una notte serena essa vedesi trasportarsi da Occidente verso Oriente con moto costante, e che da un giorno all'altro trovasi non essere ugualmente celere. Il corso della luna non coincide coll'ecclittica, ma trovasi sempre compreso nello zodiaco. La massima sua declinazione arriva talora a $28°\frac{1}{2}$; il che prova, che il cerchio descritto da essa in cielo è inclinato di 5° incirca all'ecclittica. Quando la luna attraversa questo piano avviene talora che essa trovasi diametralmente opposta al sole, e su d'una medesima linea colla terra; e allora essa entrando nel cono ombroso di questa perde la sua luce, e si ha l'Ecclisse di Luna. Talora accade altresì che in tale passaggio la luna trovasi tra il sole e la terra; e allora essa ci nasconde il sole e si ha l'ecclisse di Sole. I punti in cui l'orbita lunare taglia l'ecclittica diconsi nodi e si indicano col segno ☊. Si dice nodo ascendente quello in cui la luna passa dall'emisfero australe al boreale; e discendente ☋ quello in cui

passa dal boreale all'australe. Se l'orbita della luna fosse nel piano dell'eclittica, ovvero pochissimo ad essa inclinata, si avrebbe l'ecclisse della Luna ad ogni luna piena; ma appunto per l'inclinazione dell'orbita la luna quando trovasi in opposizione col sole cioè 180° distante, essa spesso sta fuori del piano dell'eclittica, e quindi fuori del cono ombroso della terra.

Chiamasi rivoluzione sinodica della luna il giro che essa fa relativamente al sole; e rivoluzione siderale quello che essa fa relativamente alle stelle. Il tempo che essa impiega a fare una rivoluzione sinodica, cioè a ritornare alla stessa posizione relativamente al sole è più lungo di quello della rivoluzione siderale: questo è circa di 27 giorni e mezzo, e l'altro di $29\frac{g\,1}{2}$; sia perchè compito che essa abbia il suo giro sulla sfera celeste, e ritornata alla medesima stella deve ancora percorrere l'arco descritto dal sole in quel tempo che è di circa 28°; e quindi arriverà più tardi alla medesima posizione relativa col sole.

La luna non avendo luce propria ma riflessa dal sole, ci apparisce oscura quando è in congiunzione col sole e dicesi luna nuova: essa è illuminata completamente quando trovasi ad esso opposta e dicesi luna piena. Nelle posizioni intermedie, essendo una parte più o meno illuminata rivolta alla terra, si hanno le altre fasi. Quando la luna dista dal sole 90° si hanno i quarti. Dicesi età della luna il numero de' giorni scorsi dopo la sua congiunzione col sole: i punti di opposizione e congiunzione diconsi sizigie.

La necessità di conciliare i due periodi del mese luna

re e dell'anno solare pel regolamento del calendario, impegnò gli antichi astronomi a cercare il rapporto di queste rivoluzioni. Da ovvie ricerche si rileva che in ciascun uno sono 12 lunazioni più 10 giorni circa: ma le sole osservazioni che potevano farsi dagli antichi senza strumenti, essendo le ecclissi lunari, essi dalle osservazioni di queste ritrovarono che ad ogni 18 anni e 10 giorni tutte le ecllissi ritornavano col medesimo ordine di prima; ossia il tempo più breve in cui ritornavano le stesse ecclissi e collo stess' ordine era 6585 giorni e $\frac{1}{3}$, nel qual tempo si hanno 223 lunazioni complete, il qual periodo fu detto saros. Quindi dedussero il periodo della rivoluzione sinodica lunare di $29^g.12^{or}44^m.7^s,53$, donde ne seguiva che in 19 anni solari vi erano 235 mesi lunari completi.

Le osservazioni delle ecclissi lunari erano le sole usate dagli antichi, perchè esse sole danno la posizione della luna libera dall'effetto di parallasse. Perciò essi non poterono fissare con egual facilità i periodi delle ecclissi solari, perchè appunto per la parallasse essa apparisce in luoghi diversi del cielo, secondo il luogo dell'osservatore, e perciò un ecclisse di sole che era totale in un luogo non lo era in un altro. Ma nelle ecclissi lunari quando essa perde la sua luce, la perde per tutti gli osservatori al medesimo tempo; e quando il suo centro è completamente immerso nell'asse del cono ombroso, la sua longitudine è uguale a quella del sole + 180°; onde conoscendosi la posizione del sole, se ne troverà facilmente quella della luna stessa.

Ora le ecclissi accadendo necessariamente quando la luna sta nei nodi, è facile da queste rilevare, che

tali punti vanno scostandosi continuamente; e notando con diligenza il punto in cui la luna attraversa l'ecclittica, vedrassi che esso è diverso di mese in mese, e perciò le ecclissi vanno accadendo successivamente nei vari punti dell'ecclittica. Il nodo va scorrendo con moto retrogrado sull'ecclittica a ragione di 3',10",6 al giorno; e quindi compie il suo giro siderale in 18 anni e 6 decimi, ossia in giorni solari medii 6793, 39; e la rivoluzione sinodica in 6585,78: ora abbiamo veduto che 223 lunazioni sinodiche fanno 6585 $\frac{1}{3}$; donde ne segue che dopo questo periodo il nodo combina colla luna a poco meno un minuto in arco: e questa è la ragione per cui le ecclissi tornano collo stesso ordine dopo 18 anni e 10 giorni.

Dal periodo sinodico è facile dedurre la rivoluzione siderale, che è di 27g $\frac{1}{3}$; ossia 27g,3216614; quindi il moto medio diurno sarà rapporto all'equinozio 13° 10' 35". Se con questo moto medio confronteremo il moto vero della luna, troveremo delle discordanze molto maggiori che pel sole, e vedremo che esse arrivano talora fino a 5 o 6 gradi. Il suo diametro anche corretto dell'effetto della parallasse è perpetuamente variabile, onde si conclude che varia pure la distanza, e notando i punti della sua massima celerità angolare, li vedremo corrispondere ai massimi diametri, e le minime celerità ai minimi.

I punti però a cui corrispondono in cielo le massime e minime celerità del moto e le ineguaglianze non sono fissi, ma perpetuamente mobili, e percorrono un arco di 6' 41" al giorno; in modo che solamente dopo 9 anni circa ritornano in cielo alle stesse parti di prima.

La maniera più semplice di spiegare questa ineguaglianza, che, come si vede, è analoga a quella già notata nel sole, era supporre che la luna descrivesse ancor essa un circolo eccentrico alla terra; in modo però che i suoi apsidi fossero mobili, come pure il nodo del suo piano coll'ecclittica; e quindi la prima grande ineguaglianza era l'equazione del centro. Ma se questa ipotesi rappresentava discretamente bene le osservazioni delle Ecclissi, non faceva altrettanto per le posizioni della luna nelle altre parti dell'orbita e singolarmente nelle Quadrature. Trovò Tolommeo che in queste l'equazione saliva talora fino a $7^{\circ}\frac{1}{2}$. Questa seconda ineguaglianza svanendo nelle congiunzioni e nelle opposizioni, ed essendo massima nelle quadrature, era evidente che dipendeva dalla posizione della luna relativamente al sole: quindi imaginò esso che mentre la luna si moveva nell'eccentrico, il centro di questa si andasse girando con moto retrogrado su di un piccolo epiciclo in guisa da compiere un giro intero nel tempo stesso che l'orbita lunare fà la sua rivoluzione sinodica; e così questo moto combinato con quello dell'eccentrico possa rappresentare il moto vero, dando un equazione 5° nelle sizigie, e $7^{\circ}\frac{2}{3}$ nelle quadrature. Questa idea era sufficiente a correggere l'errore principale dell'ipotesi semplice dell'eccentrico, e rimediava ai $2^{\circ}\frac{1}{2}$ di errore, di che talora la posizione osservata differiva dalla calcolata. Questa correzione dai moderni chiamasi col nome di Evezione.

Tolommeo faceva questa seconda ineguaglianza di $1^{\circ}\ 19'\frac{1}{2}$; i moderni la fanno di $1^{\circ}.20'.30''$; e la sua formola è

$$1^\circ.20'.30'' \text{sen}\left[2\left(\text{D}-\odot\right)-z\right].$$

Ticone osservando gli ostanti della Luna, cioè le sue posizioni intermedie alle sizigie e alle quadrature, trovò, che le due equazioni superiori non bastavano; ma bisognava aggiungerne una terza che chiamò Variazione, il cui valore può salire sino a 39' 54", e che dipende dal doppio della distanza vera angolare della luna dal sole. I moderni ne danno la formola

$$35'.6'' \text{sen}\left[2\left(\text{D}-\odot\right)\right]:$$

questa equazione era già stata riconosciuta dagli arabi, ma era dimenticata.

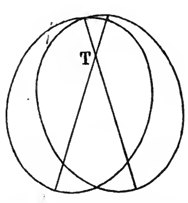
Finalmente trovò Ticone stesso che tutte queste osservazioni abbisognavano di una correzione secondo le varie parti dell'anno, e che essa dipendeva manifestamente dalla eccentricità dell'orbita terrestre, e che perciò avea per argomento l'anomalia vera del sole. Questa venne chiamata equazione annua, e si trova espressa da

$$11'\ 10'' \text{sen.anom.med.}\odot.$$

Tale era la teoria della luna trovata dagli antichi; ma quando fu scoperto da Keplero che le orbite de' corpi celesti erano ellissi, furono in questa ipotesi determinati gli elementi dell'orbita lunare; e risultò anche questa farsi in una ellisse, ma tale che il suo piano fosse leggermente oscillante e facesse un giro in cielo coi nodi: di più l'asse maggiore ancor esso era perpetuamente mobile in cielo, e faceva un giro col perigeo lunare in 9

anni. Finalmente l'eccentricità stessa era soggetta a continue variazioni. Di più pel moto ellittico le equazioni trovate dagli antichi sono ben lungi dall'esser sufficienti; e solo la teoria della gravitazione ha potuto indicare le vere leggi del moto del nostro satellite, attese le molte perturbazioni a cui esso è soggetto per l'azione del sole e dei pianeti.

Il miglior modo di rappresentarci il moto lunare è quello di imaginare che la luna percorra una ellisse perpetuamente mobile. Gli elementi dell'ellissi lunare essendo perpetuamente variabili, si devono determinare i loro valori medii per un epoca determinata. Essi sono i seguenti pel principio di questo secolo 1 Gennaio 1801.



Rivoluzione media siderale		$= 27^{g},32166$
id.	sinodica	$= 29\ ,53059$
id.	de' nodi $= 6793,39108$	$= 18^{an}\,10^{g}\,1/3$
Inclinazione media all'ecclittica		$= 5°,8',47''.9$
Distanza media dalla terra computata in raggi terrestri		$= 59^{r},96435$.
Eccentricità		$= 0^{r},05484$
Longitudine media		$= 118°,17',8''.3$.
Rivoluzione media del perigeo		$= 3232^{g},5753$.
Longitudine media del perigeo		$= 266°,10',7''.5$

Massa (prendendo per unità la massa della terra) $= 0,011399.$

Diametro espresso in miglia inglesi $= 2153.$

Densità (prendendo per unità la densità della terra) $= 0,5657$

La distanza della luna si trova conoscendo la sua parallasse e il semidiametro del globo terrestre. Questa parallasse, conosciuta che sia una volta, è facile determinar-



la per qualunque altra circostanza dietro le variazioni del diametro lunare. Infatti sia T la terra ed L la luna: è facile vedere che la parallasse della luna TLm è l'angolo sotto il quale un osservatore nel centro della luna vede il raggio terrestre: e viceversa la parallasse della terra veduta dalla luna è l'angolo nTL, sotto il quale noi vediamo il semidiametro lunare. Ora questi due triangoli danno

$$\mathrm{Tm} = \mathrm{R} = \mathrm{TL}\ \mathrm{sen}\,\pi$$

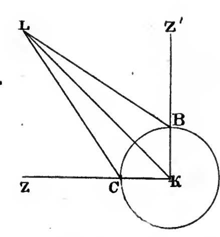
$$\mathrm{Ln} = \mathrm{r} = \mathrm{TL}\ \mathrm{sen}\,\mathrm{D}$$

donde

$$\frac{\mathrm{sen}\,\pi}{\mathrm{sen}\,\mathrm{D}} = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}} = \text{costante} = \frac{1}{0.2729}:$$

ed essendo inoltre, come si è veduto sopra p. 40.

$\frac{D}{D'} = \frac{\delta'}{\delta} = \frac{\pi}{\pi'}$ ~~$\frac{D}{D'} = \frac{\delta}{\delta'} = \frac{\pi}{\pi'}$~~



è evidente che determinata la parallasse per una distanza particolare, potrà trovarsi quella di tutte le altre[. Sia pertanto [per mezzo dello misura del diametro. **B** *un luogo di osservazione della luna, e* **C** *un altro posto sotto lo stesso meridiano o assai a questo vicino; (come p.e. Berlino e il capo di Buona Speranza: avremo le due equazioni*

$$ZCL = ZKL + CLK,$$

$$Z'BL = Z'KL + BLK;$$

e sommando

$$ZCL + Z'BL = ZKZ' + CLK + BLK = ZKZ' + \pi\left(\operatorname{sen} ZCL + \operatorname{sen} Z'BL\right):$$

poichè **CLK, BLK** *sono le parallassi di altezza : chiamando quindi* **Z, Z'** *le distanze zenitali apparenti, ed* **H, H'** *le latitudini degli osservatori avremo*

$$Z + Z' = H + H' + \pi\left(\operatorname{sen} Z + \operatorname{sen} Z'\right),$$

$$\pi = \frac{(Z + Z') - (H + H')}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(Z - Z') \cos \frac{1}{2}(Z + Z')}.$$

Se le due stazioni non sono sotto lo stesso meridiano, si prenderà una correzione **ΔN** *proporzionale alla va*

riazione della parallasse nell'intervallo de' due passaggi. Solo deve avvertirsi che per il raggio terrestre deve prendersi il raggio dell'ellissoide terrestre, cioè la distanza dal centro alla superficie, e usare la latitudine geocentrica.

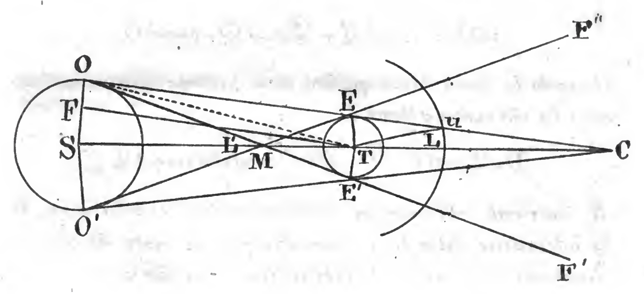
La Luna gira attorno al proprio asse precisamente nel medesimo tempo in cui gira attorno alla terra: quindi essa volta sempre a noi la stessa faccia: ma non esattamente sempre gli stessi punti; perchè il suo moto di rotazione essendo uniforme e quello di traslazione variabile, ora un moto anticipa, ora ritarda sull'altro; e ciò scopre qualche parte del disco lunare ora da un lato ora dall'altro, onde possiamo vedere successivamente circa 4/7 della sua superficie: il resto dalla terra non si vedrà mai. Questo moto dicesi Librazione. Il nodo dell'equatore lunare coincide sempre con quello dell'orbita, e gira anch'esso in 18 anni: il suo piano inclinato di 1° 33' alla ecclittica passa sempre fra questa e il piano dell'orbita lunare stessa.

Per altre particolarità fisiche della Luna vedi il Quadro fisico del Sistema planetario.

CAPO VI

Delle Ecclissi del Sole e della Luna

L'ECCLISSE Solare accade quando la luna si pone fra il sole e la terra, e il lunare quando la luna entra nel cono dell'ombra terrestre. Quindi il primo accade sempre a luna nuova o in congiunzione, il secondo a luna piena o in opposizione. Cominciamo da quest'ultimo.



Sia **S** il centro del sole, **T** quello della terra, **L** quello della luna. Il cono ombroso sarà **ECE'** determinato dalle due rette **OC**, **O'C** tangenti il globo terrestre. Si cerca la grandezza della sezione di questo cono alla distanza lunare **TL**. Il triangolo **TuE** dà

$$TuE = uTL + uCT,$$

donde

$$uTL = TuE - uCT:$$

e tirando una parallela TF alla retta EO, sarà

$$uCT = FTS$$

ora

$$\text{sen}\,FTS = \frac{SF}{ST} = \frac{SO-OF}{ST} = \frac{SO}{ST} - \frac{OF}{ST} = \text{sen}(\text{semid}\,\odot) - \text{sen}(\text{Parallas.}\,\odot),$$

poichè OF è uguale al diametro della terra veduto dal Sole (V. parte I. Cap. ult.): quindi usando gli archi pei seni, sarà

$$uTL = TuE - \text{semid}\,\odot + \text{parall}\,\odot.$$

E siccome TuE è = alla parallasse lunare; dunque la sezione del cono ombroso sarà

$$uTL = \text{Parall}\,☾ + \text{Parall}\,\odot - \text{semid}\,\odot.$$

Quando la luna tocca questo cono, allora comincia l'ecclisse, e la distanza allora è

$$D = \text{Parall}\,☾ + \text{Parall}\,\odot - \text{semid}\,\odot + \text{semid}\,☾.$$

E' evidente che non vi potrà essere ecclisse lunare, se la latitudine della luna non diviene minore di questa quantità: la minima latitudine essendo = 0, ne segue che le ecclissi avranno luogo nel nodo dell'orbita lunare, e solo fino a certa distanza da esso L☊, quando il cateto Lu della latitudine diventa < della suddetta quantità D.



Dietro gli elementi più sicuri dell'orbita lunare si trova 1° che la massima distanza dei centri della luna e dell'ombra terrestre al momento del contatto è = 63′, 29″.

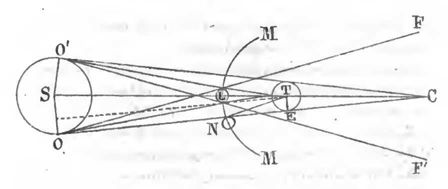
2.° Che all'istante della vera opposizione della luna la sua massima latitudine possibile è 63'.45".

3.° Che la massima possibile distanza della luna o dell'ombra terrestre dal nodo lunare è 12°.24'.

4.° Che sarà sempre certo l'ecclisse quando ☽ < 51'.57", ed impossibile se ☽ > 63'.45": fra questi è dubbio, e dipende da un calcolo più preciso degli elementi

Tirando le due tangenti inferiori alla terra OME', O'ME, si ha il cono della penombra MEFF'E, nel quale entra la luna e diminuisce alquanto della sua luce, ma appena sensibilmente quando sta vicina al cono totale. La luna ecclissata veste una tinta di rame dovuta alla colorazione de' raggi solari passati e rifratti per l'atmosfera terrestre e che si piegano nell'interno del cono; onde non sparisce mai affatto, anche quando è perfettamente centrale l'ecclisse.

Per l'ecclisse di Sole è evidente che comincerà per qualche punto della terra T quando la luna in N tocca il cono OCO': ora l'angolo LTN = TNE + TCE; quindi



aggiungendo il semidiametro lunare e ragionando come sopra, otterremo

D= semid ☾ + parall ☾ + semid ☉ — parall ☉ ;

il che è evidente da un altra dimostrazione, non potendosi toccare i dischi se la loro distanza apparente non è uguale ai loro semidiametri ; e l'apparente distanza essendo affetta dalle parallassi, si dovrà fare la differenza di questi due elementi.

E' chiaro da ciò 1.° Che l'ecclisse di sole che dicesi generale comincia per la terra in un luogo E che ha il sole all'orizzonte, e che il cono ombroso toccando la terra in una piccola area, vi traccerà una linea, che sarebbe un circolo se la terra fosse ferma ; ma attesa la sua rotazione, vi traccerà una curva assai complicata.

2.° Tirando le due tangenti interiori OF, O'F', si avrà il cono della penombra, il quale quando viene a toccare un luogo qualunque della terra, allora l'ecclisse comincerà, ma in modo solo parziale.

3.° Siccome la luna è piccola e la sua distanza dalla terra assai variabile, così avviene che spesso il vertice del suo cono ombroso non giunga fino alla terra; e allora si ha l'ecclisse annulare per quei siti della terra che passano per l'asse del cono prolungato.

Inoltre dagli elementi delle due orbite risulta 1.° Che la massima distanza possibile dei centri del sole e della luna al momento del contatto è 1° 34'.28".

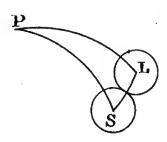
2.° Che la massima latitudine possibile della luna è = 1°.34'.52" al momento della congiunzione vera.

3.° Che la distanza massima della luna o del sole al nodo lunare è di 18° 36'.

4.° L'ecclisse sarà certo, se D < 1°,23',15", e impossi-

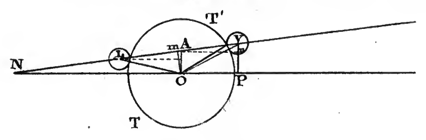
bile se $D > 1° \, 34' 52''$.

Il calcolo dell'ecclisse solare per un sito determinato si riduce a trovare il momento in cui i centri del sole e della luna distano della quantità **D** *data dalle tavole ; ossia il principio sarà quando nel triangolo sferico* **PSL** *il lato* $SL = D$. *Le tavole dando l'asc. retta degli astri e le loro declinazioni, danno il modo di calcolare*



PL, **PS**, *e l'angolo intercetto per una serie di tempi prossimi all'ecclisse ; dai quali si concluderà per interpolazione l'istante preciso del contatto al principio e al fine del medesimo ; come pure l'angolo* **PSL**, *che il punto ove comincia l'ecclisse fà col vertice più boreale del sole.*

Sia **N** *il nodo lunare :* **NAV** *l'orbita lunare inclinata di* $5° \tfrac{1}{2}$ *all'ecclittica : tirando per il centro dell'ombra terrestre un circolo di latitudine,* **OA** *sarà la latitudine della luna all'istante della* [*congiunzione*. *Può supporsi il pun* [opposizio



to O *immobile durante l'ecclisse, purchè si consideri solo il suo moto relativo alla luna. Esso avanza di circa* $2' \tfrac{1}{2}$ *all'ora mentre la luna avanza* $32' \tfrac{1}{2}$ *: onde il moto di questa relativamente ad* O *sarà* 30' *che dicesi moto relativo*

sull'Ecclittica, ed NA l'orbita relativa.

Per trovare la distanza del centro dell'ombra e del centro della luna OV, siano m ed m' i moti orarii del sole e della luna in longitudine in un tempo $= 1^h$; *ed* n *il moto in latitudine della luna: questo nel tempo* t, *sarà sull'ecclittica* $= (m'-m)t$; *e se* λ *sia la latitudine nel punto* A *della* opposizione ~~congiunzione~~, *essa sarà* $\lambda + nt$ *dopo un tempo* t, *e per la piccolezza degli archi si avrà*

$$OV^2 = OP^2 + PV^2;$$

cioè per la distanza sarà

$$D^2 = (m'-m)^2 t^2 + (\lambda + nt)^2,$$

e per l'inclinazione dell'orbita relativa, si avrà

$$\text{tang}\, T = \text{tg}\, VNP = \text{tg}\, VAn = \frac{n}{m'-m}.$$

Sviluppando la prima equazione e ponendo per $\frac{n}{m'-m}$ *il valore dell'inclinazione dell'orbita relativa, si ottiene*

$$t^2\left[(m'-m)^2 + n^2\right] + 2n\lambda t = D^2 - \lambda^2,$$

donde

$$t = \frac{-\lambda n \pm \sqrt{(\lambda^2 n^2 + D^2 - \lambda^2)\left[(m'-m)^2 + n^2\right]}}{(m'-m)^2 + n^2},$$

$$\text{sen}^2 T = \frac{n^2}{(m'-m)^2 + n^2}, \qquad \cos^2 T = \frac{(m-m')^2}{(m-m') + n^2},$$

$$t = \frac{-\lambda\, \text{sen}^2 T \pm \text{sen}\, T \sqrt{(D^2 - \lambda^2 \cos^2 T)}}{n}.$$

Pel principio e fine si farà

$$D = R \pm \delta = \text{sez. cono ombroso} + \text{semid}☽$$

e il segno + darà il principio, il − il fine: il mezzo si ha col $\surd = 0$, cioè

$$t\,\surd = \frac{-\lambda\, sen^2 T}{n}$$

e la durata sarà

$$= \frac{2\, sen\, T}{n}\sqrt{D^2 - \lambda^2 \cos T}\ ;$$

la minima distanza

$$OM = AO \cos T = \lambda \cos T\ ;$$

al qual punto M *corrisponderà anche il mezo dell' ecclisse, perché*

$$OL = OV.$$

L' ecclisse generale del sole può calcolarsi su di un principio analogo a quello delle ecclissi lunari; imaginando che il circolo TOT' *sia la proiezione del globo terrestre nel piano dell' orbita lunare. I suoi paralleli si proietteranno ivi in ellissi; il punto* O *sarà quel luogo che avrà il sole al suo zenit al momento della congiunzione; e i luoghi per cui passerà il centro del cono saranno quelli che avranno l' ecclisse centrale; gli altri parziale. Può imitarsi su di un globo terrestre artificiale il moto dell'ombra, tracciando con una riga collocata parallelamente all' orizzonte la direzione dell' orbita relativa della luna, e dividendo su di essa la sua strada in ore, e da ciascun punto calando un perpendicolo sul globo; il quale prima deve esser disposto in modo, che l' altezza del polo sia eguale alla declinazione del sole al momento della congiunzione, calcolato colle tavole precedentemente.*

Girando successivamente il globo, si avrà un'idea delle curve tracciate dall'ombra, e delle varie fasi o linee di diversa quantità.

Le ecclissi di Sole sono per tutta la terra molto più numerose di quelle di Luna nella proporzione di 41 a 29; ma per un dato luogo sono meno in numero, attesi gli effetti della parallasse, e per la piccola sezione del cono ombroso lunare ove giunge alla terra, che poco ne copre: mentre all'incontro sono più visibili quelli della Luna, perchè si mostrano sempre ad un intero emisfero.

PARTE TERZA

DEL SISTEMA SOLARE

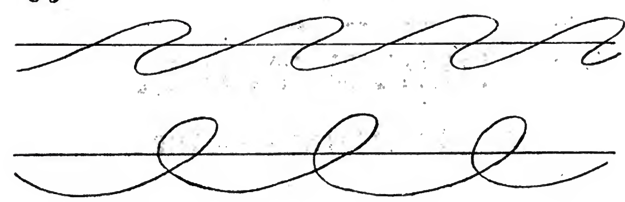
CAPO I.

Dei moti apparenti dei Pianeti

Il moto dei pianeti sulla sfera celeste è estremamente irregolare; ne' si fa in circoli massimi come quelli del sole e della luna. Riferendo ciascun giorno un pianeta alle stelle fisse, o determinandone l'ascensione retta e la declinazione, e tracciandola sù di un globo celeste, si osservano i fatti seguenti.

1.° Dal momento in cui il pianeta emerge dai raggi del sole e per un pezzo del suo corso esso è generalmente diretto, cioè avanza in asc. retta: arrivato a certo punto, si rallenta il suo moto, e infine si ferma e dicesi allora stazionario. Stato così per qualche tempo, continua il moto in direzione inversa di prima e diviene retrogrado. Passato certo tratto di questo moto, si rallenta nuovamente nel suo corso, e ritorna stazionario, per poi ripigliare nuovamente dopo qualche tempo il moto di prima in senso diretto.

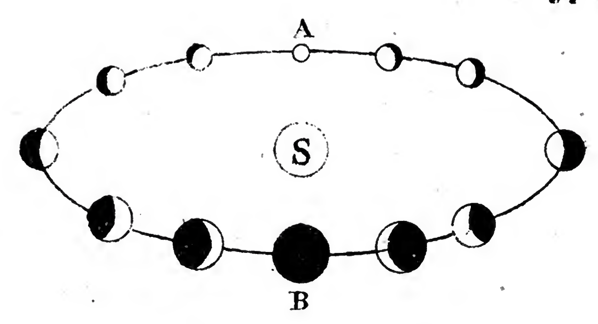
2.° Il corso dei pianeti antichi non eccede la zona dello zodiaco; e proiettando il loro corso sulla sfera, si ottiene una curva irregolare variabile come le seguenti.



3.° Con facile osservazione si rileva, che benche' tutti i pianeti facciano tutto intero il giro del cielo rapporto alle stelle fisse, pure alcuni impiegano più tempo, altri meno: Saturno più di Giove, e questo più di Marte. Questi pianeti si vedono anche a mezzanotte passare al meridiano superiore quando il sole passa al meridiano inferiore, e diconsi allora essere in opposizione, e in tale occasione sono sempre retrogradi: all' incontro Venere e Mercurio non vengono mai in opposizione, e non si scostano mai dal sole oltre un certo arco; che per Venere è di circa 46°, e per Mercurio 28°. Questi diconsi pianeti inferiori, gli altri superiori.

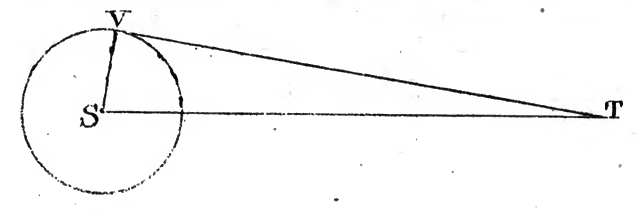
4.° Nei pianeti tutti è variabilissimo il diametro, e i superiori sono massimi quando stanno in opposizione, onde è evidente che cambia la loro distanza. Negli inferiori oltre la variabilità de' diametri si hanno anche le fasi. Gli antichi Egiziani sospettarono che Venere e Mercurio fossero due satelliti del sole e si rivolgessero attorno ad esso: la scoperta delle fasi fatta da Galileo mette ciò fuori di ogni dubbio.

L'orbita di un pianeta inferiore riferita al sole è sensibilmente circolare; ed il suo diametro apparente e le sue fasi sono come in questa figura.



Il pianeta è minimo alla congiunzione superiore A e pieno: indi diviene gobbo; poi mezzo illuminato; quindi falcato, e finalmente riesce tutto oscuro nella congiunzione B, e in tal posizione si vede talora passare avanti al disco del Sole; ma ciò assai di raro, cioè quando si combina il pianeta ad essere in congiunzione inferiore col sole, e insieme stà presso al nodo.

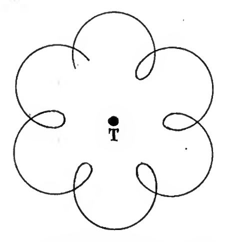
5.° I pianeti inferiori sono sempre stazionarî presso la



massima elongazione; perchè il loro moto si fa secondo il raggio visuale, che allora è tangente all'orbita. Misurando tale massima elongazione, può aversi la distanza del pianeta dal Sole, essendo

$$SV = ST \operatorname{sen} STV.$$

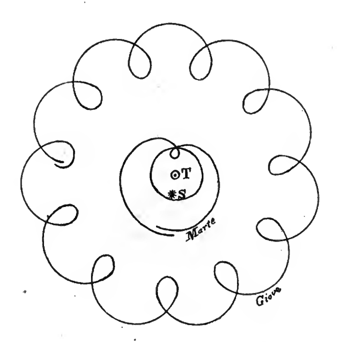
Questa distanza non essendo sempre la stessa, anche avuto riguardo al diverso valore del raggio vettore della terra, si ricava che le loro orbite non sono circolari.



Il loro moto apparente è dunque un semplice moto epicicloidale nato dalla combinazione del moto del pianeta attorno al sole col moto del sole attorno alla terra, o di questa attorno al sole.

I pianeti superiori facendo tutto il giro del cielo, non hanno congiunzione inferiore; ma invece la opposizione e la congiunzione superiore: si osserva in essi che il luogo in cielo ove succedono le successive opposizioni non è sempre lo stesso, ma continuamente vario. Saturno viene ogni anno in opposizione; ma impiega 29 anni circa a fare il giro intero della sfera. Per Giove le opposizioni ritornano presso agli stessi punti circa

dopo undici anni; il giro di Marte è più complicato. Si vede nella sottoposta figura la natura delle orbite e

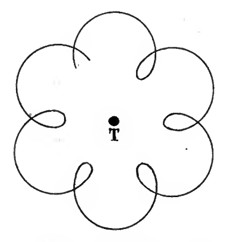


picicloidali anche dei pianeti superiori, avuto riguardo alle loro distanze dalla terra T. E' evidente che tale movimento può risultare unicamente dal moto dell'osservatore attorno al Sole combinato con quello del pianeta attorno al medesimo astro.

Ciò è facile dimostrare quando si conoscano i moti medii dei diversi pianeti rapporto al sole; i quali si possono facilmente determinare per mezzo delle opposizioni. Infatti allora il pianeta, la terra e il sole stanno in uno stesso piano perpendicolare all'ecclittica: onde la loro longitudine geocentrica è uguale alla eliocentrica. Può

$$SV = ST \operatorname{sen} STV.$$

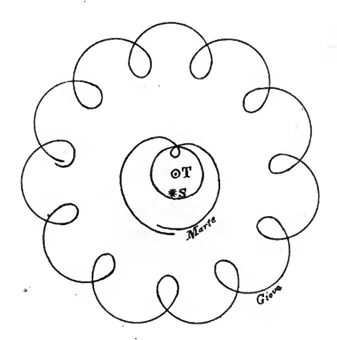
Questa distanza non essendo sempre la stessa, anche avuto riguardo al diverso valore del raggio vettore della terra, si ricava che le loro orbite non sono circolari.



Il loro moto apparente è dunque un semplice moto epicicloidale nato dalla combinazione del moto del pianeta attorno al sole col moto del sole attorno alla terra, o di questa attorno al sole.

I pianeti superiori facendo tutto il giro del cielo, non hanno congiunzione inferiore; ma invece la opposizione e la congiunzione superiore: si osserva in essi che il luogo in cielo ove succedono le successive opposizioni non è sempre lo stesso, ma continuamente vario. Saturno viene ogni anno in opposizione; ma impiega 29 anni circa a fare il giro intero della sfera. Per Giove le opposizioni ritornano presso agli stessi punti circa

dopo undici anni; il giro di Marte è più complicato. Si vede nella sottoposta figura la natura delle orbite e



picicloidali anche dei pianeti superiori, avuto riguardo alle loro distanze dalla terra T. E' evidente che tale movimento può risultare unicamente dal moto dell'osservatore attorno al Sole combinato con quello del pianeta attorno al medesimo astro.

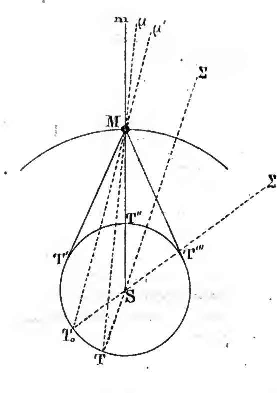
Ciò è facile dimostrare quando si conoscano i moti medii dei diversi pianeti rapporto al sole; i quali si possono facilmente determinare per mezzo delle opposizioni. Infatti allora il pianeta, la terra e il sole stanno in uno stesso piano perpendicolare all'ecclittica: onde la loro longitudine geocentrica è uguale alla eliocentrica. Può

dunque così determinarsi direttamente da un osservatore posto sulla terra una serie di longitudini eliocentriche; dalle quali conoscere il moto del pianeta, e confrontando quelle opposizioni che sono accadute nei medesimi punti del cielo, si può avere il tempo della rivoluzione del pianeta.

Risulta dallo studio di queste longitudini 1.° che il moto eliocentrico di tutti i pianeti è sempre diretto, nè mai soffre retrogradazione. 2.° Che non è uniforme; ma in alcune parti del cielo è più celere, in altre più lento; e che stanno in parti del cielo diametralmente opposte i punti di massima e minima celerità o apsidi dell'orbita. 3.° Che i tempi delle rivoluzioni eliocentriche sono diversi; e trovasi per la rivoluzione di Saturno 29^an 166^g,969; per Giove 11^an 314^g. 83; per Marte 1^an 321^g. 71, ecc; donde è facile conchiudere il loro moto medio diurno essere per Saturno 2' 0"; per Giove 4' 59"; per Marte 31'.26"; in generale si suppose che i pianeti più lenti fossero i più lontani, come è in effetto.

Ciò posto, è facile pel principio del moto relativo spiegare i loro movimenti apparenti; giacchè potremo supporre il pianeta fermo, e l'osservatore sulla terra in moto attorno al sole con celerità eguale alla differenza de' moti della terra e del pianeta stesso; essendo il moto della terra quello stesso già trovato pel Sole; cioè 59' 8" al giorno.

Sia dunque in S il sole, e TT'T" sia l'orbita terrestre, M un pianeta superiore supposto immobile per la ragione suddetta. Finchè l'osservatore si muove nel



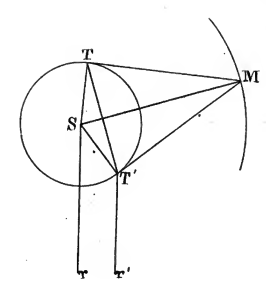
la regione dell'orbita posta tra T e T_o, esso attribuendo il proprio moto al pianeta, lo vedrà andare insieme col moto del sole in senso diretto: poichè vedrà andare il sole da Σ a Σ' e il pianeta da μ a μ'. Arrivata la terra in T', il moto facendosi secondo il raggio visuale, che trovasi in questo luogo tangente all'orbita terrestre, il pianeta parrà fermo, ossia stazionario; in tutto il tratto poi che corre da T', T'' a T''', il pianeta sarà riferito a punti in direzione opposta di prima, e però sarà retrogrado, e tale dovrà sempre essere nella opposizione in M, in cui avrà anche il massimo diametro, essendo allora più prossimo alla terra. Arrivata la terra in T''', ritornerà stazionario; e sarà nuovamente diretto da T''' in poi per tutto il resto dell'orbita.

E' evidente che la variazione delle distanze deve esser maggiore per i pianeti più vicini alla terra che non pei più lontani; e quindi Marte che è tra i superiori il più vicino varia in grandezza enormemente fino al

eguagliar Giove, e a parere una stella di seconda grandezza. L'arco di retrogradazione dipendendo, come si vede dall'angolo che sottende l'orbita terrestre veduta dal pianeta sarà minore per i pianeti più lontani che pei più vicini; e per Marte essendo circa di 26°, per Giove è 12, per Saturno 7. E' facile dietro ciò intendere la figura del moto epicicloidale data di sopra; e che il pianeta è stazionario quando si vede lungo le tangenti all'epicicloide, e retrogrado nella posizione inferiore dell'arco, e diretto in tutto il resto del suo corso.

I pianeti superiori non stando sempre sulla ecclittica, ma variando in latitudine, è evidente che il piano delle loro orbite è inclinato al piano dell'orbita solare. Quando attraversano l'ecclittica sono nel nodo; e allora può comodamente determinarsi anche la loro distanza col metodo seguente usato da Keplero.

Sia **M** il pianeta osservato mentre stà nel nodo, e sia per la prima osservazione **T** la posizione della terra. Si aspetti una intera rivoluzione del pianeta finchè ritorni allo stesso punto della sua orbita, cioè nel medesimo nodo, il che porta un intervallo di 1^{an} e 322^{g}, e si riosservi: la terra allora starà in **T'**. Dalle osservazioni conoscendo la longitudine di Marte e quella del Sole, avremo le elongazioni de' due astri, ossia gli angoli



MTS, MT'S; e dall' intervallo per la teoria del moto del sole ricaveremo l'angolo TST': di qui conoscendo i raggi vettori TS e T'S si caverà la corda TT', e gli angoli S'TT', ST'T: sottraendo questi angoli dalle elongazioni osservate, si avranno gli angoli adiacenti alla base del triangolo TMT', del quale si calcoleranno i lati TM, T'M; donde uno dei due triangoli STM o ST'M, in cui conosconsi i due lati TS, TM e l'angolo intercetto MTS darà SM distanza del pianeta. L'angolo MST' poi coll'aggiunta dell'angolo ♈ST', che è la longitudine eliocentrica della terra $= 180° + \odot$ darà la longitudine del nodo.

Questo metodo può applicarsi anche al pianeta fuori del nodo, purchè si tenga conto della sua latitudine.

Keplero usando di questo artifizio, dopo avere inutilmente esaurito tutti i modi imaginabili per rappresentare l'orbita di Marte col circolo eccentrico degli antichi, concluse che i raggi vettori dell'orbita erano ineguali, che essa era rientrante ai lati ed ellittica. Dopo ciò fu provata per tutti gli altri pianeti che le orbite loro erano altrettante ellissi nel cui foco stava il Sole

e che tutti aveano per centro di moto il sole stesso; in guisa che le aree descritte dal raggio vettore erano proporzionali ai tempi. Così restarono spiegate le diverse ineguaglianze dei loro moti: così il sistema Copernicano restò completo; poichè il Sole divenne realmente il centro di tutti i moti; mentre nel sistema di Copernico che riteneva gli epicicli e gli eccentrici il sole non stava realmente nel centro di nessuna orbita.

Restava per analogia ad ammettere che anche la terra girasse attorno al sole; essendo assurdo il pretendere che il sole corpo tanto più vasto girasse attorno alla terra con tutto il corteggio de' suoi pianeti, restando essa immobile. L'analogia inoltre del fatto di Giove scoperto da Galileo, che esso cioè era sempre accompagnato da quattro satelliti rendeva probabilissimo che la terra portasse seco attorno al sole la luna.

Ma a questi argomenti di mera induzione hanno aggiunto i posteriori astronomi delle prove positive, che dimostrano essere effettivamente la terra dotata di un doppio moto di rotazione attorno al proprio asse, che forma il giorno, e di traslazione attorno al sole, che forma l'anno; e che noi esporremo nel capo seguente.

CAPO II

Del moto della Terra

LA Terra nello spazio ha tre movimenti: 1.° di rotazione attorno al proprio asse: 2.° di traslazione attorno al sole; 3.° di precessione e nutazione. Diremo dei singoli distintamente.

§.1. Del moto di Rotazione.

Benché il cielo sembri girare, pure i più ovvii esempi de' moti relativi ci persuadono che esso può star fermo, e che invece il moto deve attribuirsi all'osservatore, altrimenti le stelle fisse che sono a immensa distanza dovrebbero girare con velocità quasi infinita. Le prove della rotazione del Globo si hanno

1.° Dalla sua forma, cui tutte le misure più accurate mostrano essere schiacciato ai poli, e rilevato all'equatore di $\frac{1}{300}$ circa del semidiametro equatoriale.

2.° Dalla diminuzione di gravità dai poli all'equatore, la quale è eguale a quella che avrebbe una elissoide della suddetta forma rotante in 24 ore, cioè di 1/194; mentre in una sfera dovrebbe essere di 1/289: ciò dipende dall'essere il raggio equatoriale nell'elissoide maggiore di quello della sfera, e avere perciò più forza centrifuga, e dall'essere i punti equatoriali a maggiore distanza dal centro e perciò meno attratti dalla massa totale.

3.° Esperimenti diretti per comprovare tale rotazione

furono proposti dal Guglielmini: consistono questi in lasciar cadere corpi gravi da molta altezza i quali devono deviare dalla verticale verso levante. Infatti nel punto più alto A la velocità di rotazione Aa è maggiore della più bassa in Bb in proporzione del raggio; e il corpo relativamente al punto infimo vi è animato da una forza di proiezione Aa–Bb; onde discendendo deve descrivere una parabola portandosi verso levante. Tal deviazione negli accuratissimi esperimenti delle miniere di Schlebuscher fatti da Bensemberg si trovò essere conforme alla teoria di circa $5^{lin},09$ per un'altezza di 262 piedi. Si osservò anche in questi esperimenti una deviazione al Sud, di cui solamente più tardi venne data ragione.



4.° L'esperimento più popolare per dimostrare il moto della terra è il seguente scoperto dal Sig.r Leon Foucault di Parigi nel 1851. Se una grande massa di piombo sia sospesa a un lungo filo e si faccia oscillare come un pendolo, si trova che il suo piano di vibrazione non resta invariabile; ma gira da destra a sinistra secondo il moto apparente del cielo. L'angolo α percorso in un giorno dal piano dipende dalla latitudine del luogo: chiamando v l'angolo di rotazione terrestre in pari tempo, sarà

$$\alpha = v.\ sen.\ Latitudine\ ;$$

onde in Roma sotto la latitudine di 41° 53', è di gradi 10 all'ora.

Per intendere come questo fatto dimostri il moto della terra, supponiamo prima un osservatore al polo, e si faccia oscillare il pendolo. Questo malgrado la rotazione del suo punto di sospensione, per causa della propria inerzia conserverà un piano invariabile nello spazio; talchè diretto al principio del moto verso una stella, vi resterà costantemente senza deviare da quella direzione assoluta. Questo fatto è di leggeri verificabile dall'esperienza. Siccome però la terra ruota sotto al filo di sospensione del pendolo, così l'azimut degli oggetti terrestri o della meridiana del luogo rapporto al pendolo andrà variando perpetuamente; e ciò accadrà nel verso stesso degli oggetti celesti e colla stessa loro celerità; l'osservatore al solito attribuirà il moto relativo al pendolo, che gli farà un giro in 24 ore siderali.

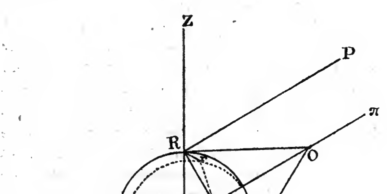
Se poi il pendolo sia portato all'equatore, ivi non devierà punto. Infatti se colà il pendolo sia messo in un moto parallelamente alla meridiana, esso per la sua inerzia resterà parallelo a se stesso; e tal moto parallelo non sarà disturbato punto dalla traslazione nel circolo massimo del suo punto di sospensione, il che facilmente pure si verifica coll'esperienza. Ora siccome durante la rotazione della terra anche la meridiana colà non varia di angolo nello spazio, ma rimane sempre parallela a se stessa, quindi anche il pendolo non muterà direzione rapporto alla meridiana, e non avrà deviazione: lo stesso vale per qualunque altra linea orizzontale diversa dalla meridiana.

Di qui si conclude ,, che al polo la deviazione angolare del pendolo eguaglia la velocità di rotazione della

„ terra, e che all'equatore è nulla."

Nelle latitudini intermedie si deve dimostrare che la deviazione è

$$v \,\text{sen. latit.}$$



Sia **C** il centro della terra: **C**π l'asse del mondo, **ZRC** la verticale. Tirando **RP** parallela a **C**π e la meridiana **RO**, sarà

$$\text{PRO} = \text{latitudine} = \text{COR}:$$

si deve ora trovare il valore dell'angolo descritto nello spazio dalla meridiana. Questa evidentemente in un giorno descrive un cono attorno all'asse del mondo, il cui angolo aperto che sia, darà la misura cercata: infatti la rotazione diurna è misurata per un tempo qualunque infinitesimo dall'angolo **Rnr** fatto dai 2 raggi del parallelo compresi in due meridiani vicinis

simi: quindi anche il moto relativo della meridiana in due posizioni successive sarà misurato dall'angolo ROr formato dai due apotemi del cono infinitamente vicini, e terminati ai raggi nR, nr: e l'angolo totale sarà misurato dall'angolo della superficie conica sviluppata attorno al suo vertice, descritta durante un giorno intero. Ma la lunghezza della base del cono è uguale a

$$2\pi nR = 2\pi RO \,sen\, ROn = 2\pi RO \,sen.\,lat.\,;$$

e siccome quando il cono è sviluppato il circolo intero di raggio uguale all'apotema ha per lunghezza della circonferenza $2\pi RO$; quindi sarà

$$\text{Angolo del Cono : intera Circonf.} = 2\pi RO\,sen.\,lat. : 2\pi RO$$

$$= sen.\,lat : 1\,;$$

ma l'intera circonferenza misura v velocità di rotazione generale della terra in 24 ore, e l'angolo del cono la deviazione relativa della meridiana α; dunque

$$\alpha : v = sen.\,lat : 1\,,$$

donde

$$\alpha = v \cdot sen.\,lat.$$

Questo teorema può dimostrarsi anche in un altro modo, cioè colla teoria della composizione delle rotazioni. Di questa daremo un cenno, essendoci necessaria per intendere altri fatti, e specialmente i moti di precessione.

Definizione. — Un corpo rotante attorno un asse permanente gira in modo che tutti i suoi punti de-

scrivono circoli paralleli tra di loro, il cui raggio è diverso secondo la loro distanza r dall'asse di rotazione. Chiamato ω il numero de' gradi che ciascun punto descrive nel tempo $=1$, supposta la rotazione dovuta alla sola inerzia e perciò uniforme, lo spazio descritto sarà ωr: la quantità ω è la velocità corrispondente a un punto collocato a distanza dall'asse $r=1$, e dicesi velocità angolare, o anche intensità della rotazione.

Corollario I. Una rotazione differisce dall'altra pel valore di ω, e pel verso in cui gira il corpo: supporremo positive le rotazioni che si fanno da sinistra a destra, come il modo delle sfere dell'orologio e negative le altre.

Corollario II. Sull'asse di rotazione la velocità di traslazione per la sola rotazione è sempre zero. La rotazione in un corpo nasce generalmente da un urto eccentrico o al suo centro di gravità, o all'asse o al punto da cui è sostenuto: quest'urto allora equivale ad una coppia, il cui piano è normale all'asse di rotazione; ossia equivale a due forze eguali parallele e contrarie, che non hanno risultante di traslazione, ma producono appunto una rotazione.

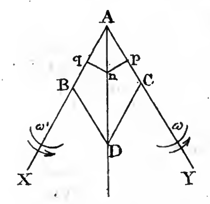
Qualunque sia la causa che produsse la rotazione, il moto è uniforme finchè è dovuto alla sola inerzia, e il piano di rotazione è invariabile come pure la direzione del suo asse.

Un corpo può ricevere più urti o più coppie diverse simultaneamente o successivamente, e siccome ciascuna di esse determina una rotazione, e quindi il moto traslatorio de' suoi punti si fa in un sistema di circoli, che necessariamente è diverso per ciascuna rotazione, e

i punti non possono andare per ambedue i sistemi de' circoli simultaneamente; quindi ne nascerà una rotazione unica attorno ad un asse intermedio, e devesi trovare l'intensità della rotazione risultante, e la direzione del suo asse.

Teorema. — „ *Date due rotazioni ad assi concor-*
„ *renti in un punto, si prendano sugli assi medesimi,*
„ *partendo dal loro punto di concorso, due lunghezze pro-*
„ *porzionali alle intensità delle rotazioni, e su queste*
„ *rette si compia il parallelogrammo: la diagonale di*
„ *questo rappresenterà la direzione dell'asse della rota-*
„ *zione risultante, e la sua lunghezza rappresenterà l'in-*
„ *tensità.* „

Sia AY *l'asse spettante alla rotazione* ω *ed* AX *quello della rotazione* ω', *e suppongansi le due rotazioni vedute dal punto* A *dirette nello stesso verso: si prendano su questi assi le porzioni* AC, AB *proporzionali alle rispettive rotazioni. Costruito il parallelogrammo* ABDC, *la diagonale* AD *sarà la direzione della rotazione risultante.*



Dimostrazione. — *Si calino da un punto qualunque* n *della diagonale due perpendicoli* np, nq *sui lati del parallelogrammo: queste due rette saranno i raggi de' circoli paralleli che dovrebbe descrivere il punto* n *attorno agli assi rispettivi* AY, AX *in virtù delle due rotazioni separate: quindi la velocità di traslazione del pun-*

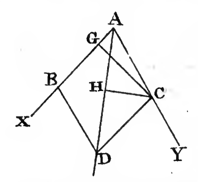
to $\mathbf{n}$ *attorno* $\mathbf{AY}$ *in un tempo* $=1$, *sarebbe* $=\omega\mathbf{p}$ *ossia* $\mathbf{ACp}$, *e per l'altro asse* $\mathbf{AX}$ *sarebbe* $=\omega\mathbf{q}$, *ossia* $\mathbf{AB.q}$: *ora questi due prodotti sono eguali, perchè si ha sempre nel parallelogrammo*

$$\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{p}}\ \frac{p}{q}$$

donde

$$\mathbf{AB.q} = \mathbf{AC.p}.$$

Inoltre essendo le due rotazioni similmente disposte rapporto al centro degli assi, il punto $\mathbf{n}$ *è trasportato in verso opposto dai due movimenti: quindi essendo questi uguali, esso starà in quiete, e perciò sarà un punto dell'asse della rotazione risultante. Questo essendo vero per tutti i punti della diagonale e solo per questi, essa dunque rappresenterà la direzione dell'asse.*



Per dimostrare l'altra parte, che la diagonale cioè esprime anche l'intensità della rotazione risultante, sia $\mathbf{\Omega}$ *questa intensità, e preso un punto* $\mathbf{C}$ *sull'asse* $\mathbf{AY}$, *si calino da esso i perpendicoli* $\mathbf{CH}$, $\mathbf{CG}$ *sulla diagonale e sull'altro asse: il punto* $\mathbf{C}$ *si moverà per moto relativo composto attorno ad* $\mathbf{AX}$ *con velocità* $\omega.\mathbf{GC}$, *e attorno ad* $\mathbf{AY}$ *con velocità* $=0$, *e intorno alla diagonale con velocità* $\mathbf{\Omega HC}$: *ora siccome la diagonale è la direzione dell'asse risultante, bisogna che le rotazioni* $\omega.\mathbf{GC}+0$ *siano equivalenti ad* $\mathbf{\Omega.HC}$, *altrimenti non si potrebbe più sostituire un*

sistema di rotazioni all' altro : dunque

$$\omega . GC = \Omega . HC \ ,$$

donde

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{HC}{GC} \ :$$

ma si ha generalmente

$$\frac{HC}{GC} = \frac{AC \, sen \, DAC}{AC \, sen \, BAC} = \frac{sen \, DAC}{sen \, ACD}$$

$$= \frac{DC}{AD} = \frac{AB}{AD} \ ;$$

dunque

$$\frac{\omega}{\Omega} = \frac{AB}{AD} \ .$$

Similmente si avrà

$$\frac{\omega'}{\Omega} = \frac{AC}{AD} \ ,$$

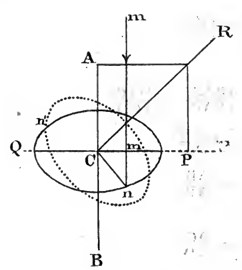
donde

$$\omega' : \omega : \Omega = AC : AB : AD \ .$$

Corollario I. Questo teorema essendo analogo a quanto si dimostra nella Statica per le forze, potranno dedursi per le rotazioni delle conseguenze analoghe a quelle ivi stabilite per le forze ; e siccome ogni rotazione può essere effetto di una coppia di forze parallele, quindi anche a queste potrà estendersi la precedente conclusione.

Corollario II. Se un corpo già dotato di una rotazione attorno ad un asse venga urtato da una coppia, che produca in esso una nuova rotazione attorno ad un altro asse, si farà sempre una composizione di assi, e la deviazione dell' asse primitivo sarà perpen-

dicolare alla direzione dell'urto, se questo è perpendicolare al piano dell'equatore del corpo rotante. Sia AB *l'asse attorno al quale gira un disco* nn' *; si imagini un urto* mn *perpendicolare al piano del disco nel punto* n *: questo tenderà a determinare nel corpo un asse di rotazione* QP *; e si dovrà trovare la direzione del nuovo asse. Prendendo* CP *e* AC *proporzionali alle due rotazioni e fatta la costruzione del parallelogrammo, sarà*



CR *la direzione dell'asse risultante : onde si vede che se il corpo è sospeso da perni materiali abbastanza liberi, l'asse* AB *del corpo prenderà la posizione* CR *. Questo facilmente si verifica col Giroscopio inventato dal sullodato Sig: Leon Foucault.*

Corollario III. *Le rotazioni quando sono dovute a componenti acceleratrici continuate tendono a produrre sui corpi liberi un parallelismo degli assi. Se supponiamo che l'urto suddetto dato secondo* mn *seguiti ad agire sul corpo nella stessa sua direzione di prima, anche dopo che l'asse è passato in* CR *, e che in origine il disco faccia colla coppia acceleratrice un angolo* α *, ad ogni istante infinitesimo si potrà decomporre quest'impulso in due parti ; una perpendicolare al piano del disco* $= \varphi \operatorname{sen} \alpha$,

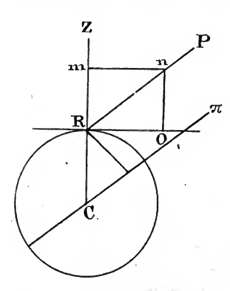
l'altra parallela $= \varphi \cos\alpha$: la prima farà deviare l'asse da R verso P, l'altra accelererà la rotazione del disco stesso, producendovi una rotazione attorno ad un asse parallelo: quando il disco girerà nel piano che passa per la direzione dell'impulso, la prima delle componenti sarà nulla; quindi l'asse non si moverà più dalla direzione QP e resterà soltanto la somma delle due rotazioni. Se le due rotazioni fossero per un istante opposte, l'asse resterebbe in equilibrio instabile, e presto si produrrebbe un giro dell'asse di 180° per rimetterle parallele.

Tutte queste conclusioni si verificano facilmente sul giroscopio, e spiegano una moltitudine di fatti ovvii, come sarebbe il non cadere della trottola girante benchè sia obliquo all'orizzonte, il correre dei cerchi e dei dischi restando inclinati senza cadere, ecc. Nella trottola la gravità tende continuamente a produrre un asse di rotazione orizzontale, che combinato coll'asse di rotazione iniziale produce un moto girante conico continuo. Nel cerchio corrente l'asse primitivo è invece orizzontale, e come quello pure determinato dalla gravità è orizzontale ma generalmente ad angolo col precedente, ne nasce un moto spirale che è più visibile poco prima della caduta.

Abbiamo detto che un corpo rotante per la sola inerzia conserva il piano di rotazione fisso come fa il pendolo, e quindi il suo asse è capace di mostrare il moto della terra come fa il pendolo stesso, pel moto relativo di questa coi punti invariabili di esso asse. Su ciò si fonda la dimostrazione del moto della terra da_

ta col Giroscopio dal suo inventore.

Con questi principii è facile intendere come la deviazione del pendolo dimostri il moto della terra. Sia R il luogo di osservazione: RZ la verticale, RP la direzione del polo, RO la meridiana: la velocità di rotazione della terra attorno all'asse RP si rappresenti per Rn; le componenti attorno alla verticale e all'orizzontale saranno Rm ed RO: ora



$$Rm = RN \,\text{sen}\, MnR = Rn \,\text{sen.lat.}$$

dunque la velocità di deviazione attorno la verticale è

$$= \text{Veloc. diurna} \times \text{sen. latit.}$$

come sopra. Questa componente al polo $= v$, e all'equatore $= 0$.

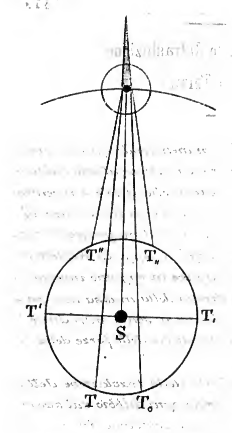
Molti fenomeni alla superficie della terra sono la conseguenza del suo moto rotatorio: tali sono la direzione de' venti costanti o Alisèi nelle zone tropicali, la direzione delle grandi correnti marine, la deviazione de' fiumi e dei vagoni delle strade ferrate, che sempre si fa a destra ecc.; e possono servire a dimostrarlo.

§ 2. Del moto di traslazione della Terra

L'analogia degli altri pianeti rende quasi certo, che la terra deve girare ancor essa attorno al sole: almeno è indispensabile l'ammettere che il sole è il centro commune di tutti gli altri, e che sola la terra corpo si piccolo non deve tenere intorno a se il maggiore di tutti. Dopo poi che Newton epilogò le leggi di Keplero nel solo fatto di una forza che agisce in ragione inversa del quadrato della distanza e diretta della massa, non potrebbe sostenersi la quiete della terra senza introdurre le idee più assurde intorno alla natura delle forze della creazione.

Ma non mancano prove dirette della traslazione della terra attorno al sole che tolgono ogni dubbio sul suo moto. Queste sono fondate sulla composizione del moto della luce con quello della terra stessa, i fenomeni risultanti dalla quale sono detti di aberrazione della luce medesima.

La luce consiste nel moto vibratorio dell'etere ed ha una propagazione successiva. Questa scoperta fu fatta da Rœmer mentre cercava di spiegare certe irregolarità de' moti de' satelliti di Giove. Aveano gli astronomi osservato che le tavole delle eclissi de satelliti di questo pianeta (costruite sulle osservazioni fatte in tutti i punti dell'orbita e che perciò potevano rap



presentare la legge media de' movimenti) anticipavano sull' istante dell' immersione quando la terra stava p. e. in T e T_0; combinavano quando erano in T' e $T_{,}$, e ritardavano quando stava in T'' e $T_{,,}$. Tal differenza variava a norma della lunghezza della corda che misurava le distanze de' due luoghi T' e T''. Roemer attribuì tale discordanza alla durata della trasmissione della luce attraverso l'orbita terrestre; e da facil calcolo dedusse che essa impiegava 8^m $10''$ a percorrere il raggio dell'orbita terrestre, cioè a venire dal Sole a noi.

In questo tempo medesimo si cercavano da tutti gli astronomi le prove del moto della terra attorno al sole, e si sperava di trovarlo nella parallasse delle stelle, come avea già indicato Galileo. Sia AB l'orbita supposta della terra, ed S una stella: la sua latitudine sarà DAS mentre la terra sta in A, e diventerà DBS = DAS − ASB quando la terra passa in B. La misura delle latitudini assolute essendo assai difficile, si poteva vedere il moto parallattico ASB confrontando una stella

grande con un'altra piccolissima, perchè essendo probabile che la grande fosse più vicina e la piccola più lontana, lo spostamento dovea esser maggiore per la grande e quindi aversi una parallasse relativa.

I primi tentativi fatti da Galileo stesso furono inutili a verificare questi fatti per l'imperfezione degli strumenti; e solo si concluse esser le stelle tanto lontane che la loro parallasse era insensibile. Perfezionati che furono gli strumenti, diversi astronomi si accorsero che la stella polare avea un movimento annuale, ed alcuni di essi credettero avere trovata in questo la parallasse: ma l'analisi più accurata del movimento fece vedere che questo moto seguiva altre leggi. Così p.e. una stella posta nel polo dell'ecclittica; mentre la terra stava in A, si sarebbe dovuta vedere in a; e passan-

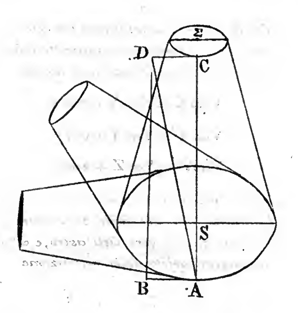
do la terra in B la stella andare in b ; ma invece la stella nel primo caso appariva in n , e nel secondo in m: ciò era spostata non secondo il piano condotto pel sole come voleva la regola della parallasse ; ma in un piano ad angolo retto con quello , cioè secondo la tangente dell' orbita terrestre.

In secondo luogo le stelle principali osservate avevano quasi tutte la medesima parallasse : ed era improbabile che tutte si trovassero ad ugual distanza.

Bradley dopo avere studiato con attenzione il movimento sulla stella γ del Dragone col settore zenitale, ne diede anche la vera spiegazione deducendola dalla composizione del moto della luce col moto dell' osservatore.

Sia AB l'arco percorso dalla terra in un tempo t, e AC lo spazio che la luce percorre nel medesimo tempo: l' impulso nell'occhio dell'osservatore sarà lo stesso , sia che esso proceda verso AB , ovvero l'etere lo colpisca con velocità uguale e contraria; quindi nel punto A potrà farsi la composizione de' due moti AB,AC; e la diagonale AD del parallelogrammo ACDB esprimerà la direzione della risultante . Questo fatto è analogo a quello per cui uno resta bagnato mentre è trasportato in carrozza ; e la pioggia che cade verticale sembra scendere obliqua . Per tale deviazione del raggio visuale la stella nel polo dell'eclittica sembra descrivere nel cielo un circolo, imagi-

ne del moto della terra, sempre però spostando nel piano tangente l'orbita terrestre. Per le stelle però fuori



dei polo dell' ecclittica, il circolo veduto obliquamente diviene una ellisse, e finalmente una retta nel piano dell'ecclittica stessa: onde in genere l'aberrazione in latitudine sarà

= aberraz. in long. × sen. latit. appar.

Tali conseguenze della teoria sono verificate dall' osservazione.

Siccome poi la velocità della luce è enorme rapporto a quella della terra, così l'angolo di deviazione è piccolissimo, ed è di 20",25 appunto quale darebbe la velocità della luce dedotta dalle ecclissi dei satelliti di Giove. Per calcolare l'effetto della aberrazione in Asc.

retta e in declinazione, si fa dietro la teoria della composizione delle forze.

Sia V la velocità della luce, v quella dell'occhio, e V' la loro risultante. Riferiscansi queste tre celerità a tre assi ortogonali, e si avranno le seguenti relazioni statiche tra le proiezioni delle componenti e della risultante

$$V'\cos X' = V\cos X + v\cos x,$$

$$V'\cos Y' = V\cos Y + v\cos y,$$

$$V'\cos Z' = V\cos Z + v\cos z.$$

Prendasi il piano dell'equatore per quello delle xy e la linea degli equinozi per asse delle x, si avrà; chiamando α, δ, r le coordinate vere dell'astro, e α', δ', r' le coordinate apparenti affette dalla aberrazione

$$\cos X = \frac{x}{r} = \cos\alpha\cos\delta,$$

$$\cos Y = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\alpha\cos\delta,$$

$$\cos Z = \frac{z}{r} = \operatorname{sen}\delta:$$

e simili formole coll'aggiunta d'un apice ' daranno le coordinate apparenti. Similmente detta ω l'obliquità dell'ecclittica e τx l'angolo che fa la direzione del moto annuo, ossia la tangente all'orbita terrestre coll'asse delle x, avremo

$$V\cos x = v\cos \tau x,$$

$$v\cos y = v\operatorname{sen}\tau x\cos\omega,$$

$$v\cos z = v\,\text{sen}\,\tau x \sin\omega\,;$$

quindi le tre equazioni superiori diventano

$$(a)\quad \begin{cases} V'\cos\alpha'\cos\delta' = V\cos\alpha\cos\delta + v\cos\tau x\,, \\ V'\,\text{sen}\,\alpha'\cos\delta' = V\,\text{sen}\,\alpha\cos\delta + v\,\text{sen}\,\tau x\cos\omega\,, \\ V'\,\text{sen}\,\delta' = V\,\text{sen}\,\delta + v\,\text{sen}\,\tau x\,\text{sen}\,\omega\,. \end{cases}$$

Aggiungendo insieme la somma dei quadrati di queste equazioni, si ha

$$V'^2 = V^2 + v^2 + 2Vv$$

$$(\cos\alpha\cos\delta\cos\tau x + \text{sen}\,\alpha\cos\delta\,\text{sen}\,\tau x\cos\omega + \text{sen}\,\delta\,\text{sen}\,\tau x\,\text{sen}\,\omega).$$

Facciasi per brevità il trinomio trigonometrico $= K$, e dividasi l'equazione per V^2: il termine $\frac{v}{V}$ è assai piccolo, e si potrà trascurare il suo quadrato; infatti esso non supera mai 21″: quindi estraendo la radice e trascurando i termini di second'ordine, avremo

$$V' = V\left(1 + \frac{v}{V}K\right),$$

e dividendo algebricamente

$$\frac{V}{V'} = 1 + \frac{v}{V}K\,,$$

la qual formola ci servirà bentosto.

Si moltiplichi la prima delle equazioni (a) per $\text{sen}\,\alpha'$, e la seconda per $\cos\alpha'$ e si sottraggano: otterremo

$$0 = V\,\text{sen}(\alpha'-\alpha)\cos\delta + v\cos\tau x\,\text{sen}\,\alpha' -$$

$$v\,\text{sen}\,\tau x\cos\omega\cos\alpha':$$

dividendo per V, e riflettendo che $\alpha'-\alpha$ è arco piccolis

simo, onde si ha nel secondo membro $\alpha' = \alpha + \delta\alpha$, che se si sviluppa porta i termini di second'ordine $\Delta \times \frac{v}{V}$ che dobbiamo trascurare, ci resterà semplicemente

$$\alpha' - \alpha = -\frac{v}{V}\left(\cos\tau x\, \text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\tau x \cos\omega \cos\alpha\right) \sec\delta \;, \quad \text{(b)}$$

che dà l'aberrazione in ascensione retta.

Prendasi ora la terza equazione (a) e si scriva

$$\text{sen}\,\delta' = \frac{v}{V'}\,\text{sen}\,\delta + \frac{v}{V'}\,\text{sen}\,\tau x\, \text{sen}\,\omega$$

ora

$$\text{sen}\,\delta' - \text{sen}\,\delta = d\,\text{sen}\,\delta = \cos\delta\, d\delta = (\delta' - \delta)\cos\delta\;;$$

dunque

$$\delta' - \delta = -\frac{v}{V}\left(\cos\alpha\cos\tau x + \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\tau x \cos\omega\right)\text{sen}\,\delta$$

$$-\frac{v}{V}\frac{1}{\cos\delta}\,\text{sen}^2\delta\, \text{sen}\,\tau x\, \text{sen}\,\omega + \frac{v}{V}\frac{\text{sen}\,\tau x\, \text{sen}\,\omega}{\cos\delta}\,,$$

$$\text{(c)}\quad \delta' - \delta = -\frac{v}{V}\left(\cos\alpha\cos\tau x + \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\tau x\cos\omega\right)\text{sen}\,\delta$$

$$+\frac{v}{V}\,\text{sen}\,\tau x\, \text{sen}\,\omega \cos\delta\;:$$

in queste formole resta solo ad eliminare l'angolo τx. Dalla geometria sappiamo che

$$\cos\tau x = \frac{dx}{ds} \quad , \quad \text{sen}\,\tau x = \frac{dy}{ds}\;;$$

essendo ds l'arco elementare di una curva

$$ds = dr^2 + r^2 dv^2.$$

Ora nella ellisse $r = \frac{p}{1 - e\cos(A - p)}$: se A è la longitudine della terra e p quella del suo perielio

$$x = r\cos A \;, \quad y = r\,\text{sen}\,A\;;$$

quindi

$$\cos\tau x = \frac{dx}{ds} = \frac{dr\cos A - r\,\mathrm{sen}\,A\,dA}{\sqrt{dr^2 + r^2 dA^2}}$$

$$= \frac{\frac{dr}{dA}\cos A - r\,\mathrm{sen}\,A}{\sqrt{\frac{dr^2}{dA^2} + r^2}} = \frac{-e\,\mathrm{sen}\,p - \mathrm{sen}\,A}{\sqrt{1 - 2e\cos(A-p) + e^2}} \;;$$

$$\mathrm{sen}\,\tau x = + \frac{\cos A + e\cos p}{\sqrt{1 - 2e\cos(A-p) + e^2}} \;:$$

la velocità v *nel moto ellittico è*

$$v = n\sqrt{\frac{2}{r} - 1} = n\frac{\sqrt{1 - 2e\cos(A-p) + e^2}}{\sqrt{1-e^2}},$$

essendo n *il moto medio della terra: quindi le componenti da sostituire nelle formole superiori*

$$v\cos\tau x = -\frac{n}{\sqrt{1-e^2}}\left(\mathrm{sen}\,A + e\,\mathrm{sen}\,p\right),$$

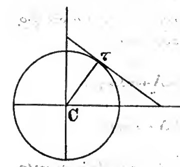
$$v\,\mathrm{sen}\,\tau x = +\frac{n}{\sqrt{1-e^2}}\left(\cos A + e\cos p\right).$$

Facciansi queste sostituzioni, e si metta la costante $\frac{n}{V\sqrt{1-e^2}} = A$ *; e invece della longitudine della terra e del perielio terrestre pongansi rispettivamente la longitudine del sole cioè* $A = 180 + \odot$, *e il perigeo solare* $p = 180 + \pi$ *, col che si cambiano i segni alle precedenti: avremo le due formole finali*

$$(d)\begin{cases} \alpha' - \alpha = -A\left(\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\odot + \cos\odot\cos\omega\cos\alpha\right)\sec\delta \\ \qquad -Ae\left(\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\pi - \cos\pi\cos\omega\cos\alpha\right)\sec\delta\,, \end{cases}$$

$$(d)\left\{\begin{aligned}\delta'-\delta = &-A(\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\odot-\mathrm{sen}\,\alpha\cos\omega\cos\odot)\,\mathrm{sen}\,\delta-A\,\mathrm{sen}\,\omega\\ &\cos\delta\cos\odot-Ae(\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\pi-\mathrm{sen}\,\alpha\cos\omega\cos\pi)\,\mathrm{sen}\,\delta\\ &-Ae\,\mathrm{sen}\,\omega\cos\delta\cos\pi.\end{aligned}\right.$$

La costante A *si può calcolare dietro il moto medio della terra e la velocità della luce, ma meglio torna il determinarla direttamente dalle variazioni stesse delle coordinate. Essa si assume* $A = 20{,}42$ *nel Cat. Britannico, ed* $eA = 0.32$ *; ma di questi secondi termini non si tien conto che per le stelle assai vicine al polo.*



Le formole (d) *possono dar l'aberrazione diurna, purchè si metta* $\omega = 0$, *e l'angolo* $\odot$ *sarà la distanza del punto d'ariete al meridiano che passa per l'osservatore* τ, *cioè il tempo siderale* t *; e le formole diventano*

$$\alpha'-\alpha = -A'(\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,t+\cos\tau\cos\alpha)\sec\delta =$$
$$-A'\cos(\alpha-t)\sec\delta = -A'\cos h\sec\delta,$$
$$\delta'-\delta = -A'\,\mathrm{sen}(\alpha-t)\,\mathrm{sen}\,\delta = -A\,\mathrm{sen}\,h\,\mathrm{sen}\,\delta.$$

In queste formole $A' = \dfrac{v'}{V}$,

e chiamando L *la latitudine geocentrica, si sa essere* $v = \dfrac{2\pi r}{\tau}$ *essendo* r *il raggio del parallelo, ed* $r = \dfrac{\cos L}{\sqrt{1-e^2\,\mathrm{sen}^2 L}}$; *riducendo tutto a secondi di arco, ed assumendo per*

il tempo, in cui la luce percorre il semiasse maggiore dell'orbita terreste 493^s.2, si trova

$$\alpha'-\alpha=-0''.30847\frac{\cos L}{\sqrt{1-e^2 sen^2 L}}\cos h\, sen\delta,$$

$$\delta'-\delta=-0''.30847\frac{\cos L}{\sqrt{1-e^2 sen^2 L}} sen h\, sen\delta;$$

ove si vede che l'aberrazione è massima in Asc. Retta al meridiano; ma essa è così piccola che suole trascurarsi; ovvero al più essendo costante si suole unire agli errori strumentali congiungendolo a quello della collimazione. Per Roma si ha al meridiano

$$\alpha'-\alpha=-sec\delta.$$

Con simile mutazione di far $\omega=0$ le formole (d) danno l'aberrazione in longitudine Λ e latitudine λ

$$\Lambda'-\Lambda=A\left[\cos(\odot-\Lambda)+e\cos(\pi-\Lambda)\right],$$

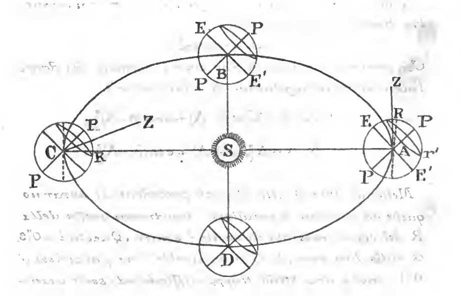
$$\lambda'-\lambda=A\left[sen(\odot-\Lambda)+e\, sen(\pi-\Lambda)\right].$$

Mettendo $90+\odot$ nelle formole precedenti, si avranno quelle da calcolare le parallassi; ma tranne quella della R del cigno, nessuna di queste è sicura. Questa è $=0''.3$. α della lira secondo Struve avrebbe una parallasse di $0''.1$; ma è una stella troppo difficile ad essere osservata.

---

§ 3. Dei moti di Precessione e Nutazione.

Mentre la terra gira attorno al Sole col moto annuo, il suo asse per la propria inerzia resta sensibilmente parallelo a se stesso : quindi hanno origine le variazioni delle stagioni. Sia S *il sole, e* ABCD *l'orbita della terra.*



Quando la terra sta all'estremità del cancro A *il Sole si vede in capricorno* C *; l'asse della terra essendo inclinato di 66° ½ al piano dell'orbita, e l'ecclitica all'equatore di 23° ½ ; la distanza zenitale del sole per un luogo* R *la cui verticale* ZR,

quando il meridiano mobile terrestre passa sotto di esso sarà

$$EAS + ZAE \text{ , cioè } L + \delta$$

l'obliquità. Allora il polo **P** *è tutto in ombra e* **P'** *in luce perchè* **t t'** *sarà il circolo terminatore dell'ombra. Quando la terra passa pel punto* **B** *a* 90° *da* **A** *, allora il circolo terminatore dell'ombra passa per i poli ed accade l'equinozio, e la distanza zenitale del sole è uguale alla latitudine. Passata la terra nel capricorno* **C** *, la distanza zenitale del sole sarà*

$$ZCS = \text{lat} - \text{obliquità},$$

e in **D** *ritornerà in equinozio.*

Da questo si vede che il parallelismo dell'asse terrestre porta seco la variazione della distanza zenitale meridiana del sole, e quindi tutti i fenomeni delle stagioni e della lunghezza de' giorni e delle notti come si osservano nel moto apparente.

Però tal parallelismo non è perfettamente rigoroso; e mentre il centro della terra percorre l'intera circonferenza, l'asse si sposta conicamente di un piccolo angolo che sul circolo polare è di 46" e riferito all'equatore costituisce i 50",5 della retrogradazione dei punti equinoziali. L'asse della terra ha dunque un lentissimo moto conico, e fa, come si disse, un giro in 25000 anni circa. Però questo moto non è uniforme nè perfettamente circolare, ma ondulatorio; cioè ora ritardato ora accelerato dalla sovrapposizione di alcune altre piccole vibrazioni che costituiscono la **Nutazione**. *Il periodo della parte principale di questa seconda oscillazione è di 18 anni, cioè uguale alla rivoluzione dei nodi dell'orbita lunare.*

La Nutazione fu scoperta da Bradley mentre con successive osservazioni voleva verificare la teoria dell'aberrazione. Egli vide che le declinazioni crescevano costantemente per 9 anni e per altri nove calavano, e altrettanto facevano le ascensioni rette. La maniera che parve la più semplice a Machin per rappresentare questi moti fu di ammettere uno spostamento del polo dell'equatore terrestre tale, che esso descrivesse un piccolo circoletto di 9" di raggio, o meglio una piccola ellisse attorno al luogo del polo medio, cioè quale risulterebbe dalla sola precessione. Il periodo di 18 anni suggerì l'idea che esso fosse connesso col moto del nodo Lunare, e realmente trovò che tra la posizione del nodo lunare e del polo vero eravi questa relazione; che cioè l'ascensione retta del polo vero rapporto al polo medio era sempre più avanzata di un angolo retto della longitudine del nodo dell'orbita lunare, cioè di $\Omega + 90°$.

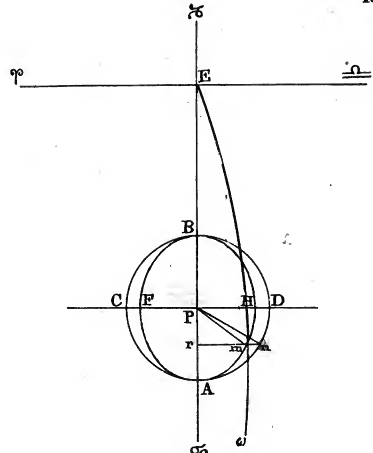
Sia **E** (fig. seg.) il polo dell'eclittica ♋♋ il coluro de' solstizi ♈♎ un circolo condotto pel polo dell'eclittica e i punti equinoziali, **P** il polo medio dell'equatore: il polo vero starà in **A** quando il nodo lunare è in ariete, e passato il polo in ♋, il polo vero sarà in **K**, e continuerà camminando su di una ellisse, il cui asse maggiore $a = 9'',223$ sta sul coluro de' solstizî; ed il minore $b = 7'',17$ è sul coluro degli equinozî.

Le coordinate del polo vero rapporto al medio sono

$$x = Pr = Pm \cos APm,$$

$$y = rm = Pm \operatorname{sen} APm,$$

ovvero descrivendo un circolo circoscritto alla ellisse, e



prolungando l'ordinata rm *fino al suo incontro col circolo in* n , *fatto* $APn = u$, *sarà*

(a) $$x = a\cos u \quad , \quad y = b\sin u :$$

ora trovasi che ottimamente si rappresentano i fenomeni prendendo $u = \Omega$.

E' facile quindi dedurre le variazioni della obliquità dell'ecclittica , e lo spostamento del punto equinoziale dietro

tale ipotesi: infatti la prima $d\omega$ sarà sempre l'ascissa x, onde

$$x = a \cos \Omega ;$$

e la seconda l'ordinata rm: ma questa essendo su di un circolo minore dovrà riferirsi al circolo massimo tirando un circolo $Em\omega$, che incontrerà l'ecclittica in qual che punto: e l'arco di circolo massimo ivi determinato sarà

$$\frac{rm}{\cos(90^\circ - \omega)} = \frac{rm}{\operatorname{sen} \omega} ;$$

e così lo spostamento del punto di ariete per la nutazione sarà

$$d\Omega = \frac{rm}{\operatorname{sen} \omega} \operatorname{sen} \Omega = \frac{7''.17}{\operatorname{sen} \omega} \operatorname{sen} \Omega .$$

Dalla teoria si ha

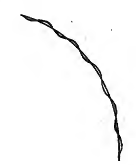
$$b = a \frac{\cos 2\omega}{\cos \omega} ,$$

donde riducendo

$$d\Omega = 2a \cot 2\omega \operatorname{sen} \omega :$$

a dicesi costante di nutazione.

Il vero moto del polo sulla sfera celeste è dunque una curva composta del circolo generale di precessione media con sovrapposta questa ellisse svolta in guisa di un'onda minore sopra il circolo maggiore, come si vede nella annessa figura.



Oltre la nutazione del periodo di 18 anni l'asse terrestre è soggetto ad un'altra piccola oscillazione che dipende dalle rivoluzioni annue e mensili del sole e della luna. Esse sono piccolissime e spesso si trascurano, e sono

state scoperte solo mediante la teoria. I loro valori per la rivoluzione annua del sole sono secondo Bessel

$$d\omega = 0''.58 \cos 2\Theta ,$$

$$d\Upsilon = 1.33 \operatorname{sen} 2\Theta ;$$

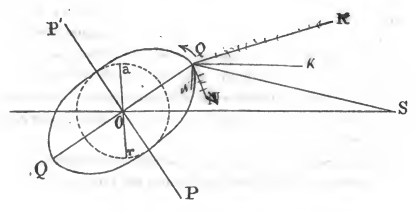
e per quella mensile della luna

$$d\omega = 0''.087 \cos 2 \,☽ ,$$

$$d\Upsilon = 0.201 \operatorname{sen} 2 \,☽ .$$

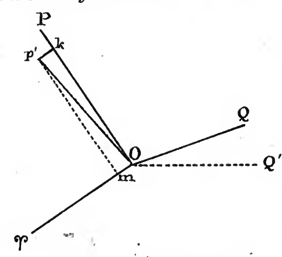
Ammessa la verità di questi movimenti, era da studiare la loro causa; e questa si riconobbe dipendere dall'attrazione che esercitano sulla terra il sole e la luna.

La terra non essendo sferica ma rilevata all'equatore, si può concepire come una sfera che abbia una protuberanza attaccata al suo piano equatoriale; ed è appunto l'attrazione del sole e della luna su questa pro-



minenza che produce tutti questi movimenti. Per intenderlo più facilmente suppongasi il sole in S e Q un pun

to della massa equatoriale prominente: l'azione del sole diretta secondo SQ tende a far coricare l'equatore con la componente QN sul piano dell'orbita solare OS; e se la terra stesse ferma presto potrebbe ridurla su questo piano rotando attorno ad O♈. Ma l'equatore essendo in moto di rotazione, dovrà questa sua rotazione comporsi attorno al suo asse OP colla nuova rotazione attorno alla retta O♈, che è ad angolo retto coll'asse della rotazione principale.



Prendasi adunque nelle direzioni dei due assi rispettivi OP, O♈ le porzioni Ok, Om esprimenti le due rotazioni: e costruito il parallelogramma Op', la retta Op' sarà la nuova direzione dell'asse della terra: quindi esso avrà deviato dal primo luogo; e tale deviazione sarà ad angolo retto coll'impulso primitivo; e persistendo continuamente l'azione del sole e della luna, ne nascerà un giro continuo conico nell'asse della terra.

Questa teoria fa vedere che l'azione di un astro che gira attorno alla terra fuori del piano del suo equatore deve produrre un'oscillazione circolare nell'asse terrestre: ma essendo due gli astri che sono in moto, cioè il sole e la luna; e di più l'azione di questa essendo variabile,

perchè atteso il moto del suo nodo, l'obliquità della sua orbita all'equatore terrestre ora è 23°30′+5′.8′= 28°38′, ora 23°30°−5°8′= 18°22′: e inoltre tutte le durate di questi movimenti periodici essendo incommensurabili tra di loro, ne risulta

1° Un moto medio generale che costituisce la precessione lunisolare di 50″2, di cui 15″4 sono dovuti al sole e 34″8 alla luna.

2° Un periodo dipendente dal giro del nodo lunare.

3° Una variazione annuale e un'altra mensile dipendente dalle parti non compensate che vanno a formare il moto medio. La teoria mostra che la grandezza della precessione e nutazione dipende dal rapporto dei momenti di inerzia del globo terrestre.

CAPO III.

Del modo di determinare gli elementi dell'orbita di un Pianeta

PER conoscere esattamente l'orbita di un pianeta è necessario sapere:

1.° La posizione del piano dell'orbita relativamente ad un piano noto, il quale è comunemente l'ecclittica. Questo sarà noto, se si conosca I. l'inclinazione dell'orbita all'ecclittica, II. la posizione della sua intersezione colla medesima, ossia la linea dei nodi relativamente all'equinozio, che dicesi longitudine del nodo ascendente.

2.° Le dimensioni dell'orbita stessa, e la sua posizione nel proprio piano. Queste importano I. l'asse trasverso; II. l'eccentricità; III. la posizione dell'asse maggiore stesso relativamente al nodo o relativamente all'equinozio, cioè la longitudine del perielio.

3.° Finalmente bisogna sapere I. il tempo in cui il pianeta fa la sua rivoluzione attorno al sole, donde deducesi il suo moto medio e II. il momento in cui esso si trovò in un determinato punto dell'orbita per cominciare da esso a contare i moti per le epoche posteriori o anteriori.

Gli elementi sono dunque sette.

I. Longitudine del nodo = ♈☊.

II. Inclinazione dell'orbita all'ecclittica = i.

III. Semiasse maggiore $= a$.

IV. Eccentricità $= e$.

V. Longitudine del perielio $= \pi$.

VI. Tempo periodico $= T$, o moto medio $= n$.

VII. Epoca da cui si comincia a contare il moto medio $= c$.

Queste sette quantità si riducono a sei, se si trascuri la massa del pianeta relativamente a quella del sole; perchè allora il semiasse trasverso deducesi dal moto medio o viceversa.

Daremo prima una idea dei metodi usati dagli astronomi per abbozzare gli elementi dei pianeti antichi, dietro una lunga serie di osservazioni fatte in circostanze opportune; riserbando ad altro luogo il dare un cenno di quelli inventati dai moderni per trovare l'orbita intera dietro pochissime osservazioni. La difficoltà del problema nasce dall'esser noi fuori del centro di moto dei pianeti; e però non si possono ad essi applicare generalmente i metodi usati pel sole o per la luna; a meno che non si facciano le osservazioni in circostanze particolari che per lo più sono rare.

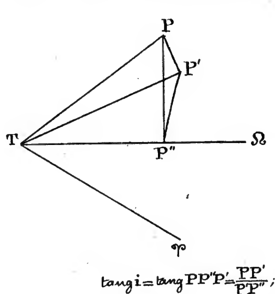
Il fondamento di tutte le altre ricerche pei pianeti antichi è la cognizione del moto medio. Questo abbiamo già fatto vedere come si determina mediante le opposizioni: così pure si è accennato il modo di determinare i nodi.

Un pianeta sta nel nodo quando la sua latitudine è nulla: esso allora trovasi nel piano dell'ecclittica, ed un osservatore collocato nel sole lo vedrebbe pure in questo stesso piano, benchè riferendolo ad un punto diverso della sfera celeste. Si osserverà dunque il pianeta più volte

consecutivamente, e, calcolatane la sua latitudine, si vedrà quando essa da positiva diventa negativa o viceversa: e dai tempi in cui essa ha segno opposto potrà facilmente dedursi il momento del passaggio del pianeta per l'ecclittica, cioè pel nodo.

Per determinare l'inclinazione, 1° si osservi la latitudine del pianeta nell'epoca in cui la terra sta sulla linea dei nodi del pianeta stesso; cioè quando la longitudine della terra veduta dal sole eguaglia la longitudine del nodo.

Sia T la terra sulla linea del nodo del pianeta. s'abbassi una perpendicolare PP' sul piano dell'ecclittica, e si conducano PP'' e P'P'' perpendicolarmente alla linea dei nodi. L'angolo PP''P' misurerà l'inclinazione dell'orbita sull'ecclittica. Ora



$$\tang i = \tang PP''P' = \frac{PP'}{P'P''};$$

ma osservando la latitudine λ del pianeta si avrà

$$PP' = TP' \tang \lambda,$$

$$P'P'' = TP' \sen P''TP' = TP' \sen(\Lambda - ☊),$$

indicando per Λ la longitudine del pianeta ♈TP': quin

di sostituendo si avrà

$$\tan g\, i = \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{sen}(\Lambda - \Omega)}\,.$$

Queste osservazioni non possono farsi che ogni anno; in altri casi si supplirà con altri metodi.

La determinazione degli altri elementi si ha facilmente dopo la soluzione dei seguenti problemi.

Problema I°. — Determinare l'equazione del piano dell'orbita del pianeta. —

Questa equazione avrà la forma

$$z = Ax + By\,;$$

e i valori delle coordinate eliocentriche saranno

$$x = r \cos L \cos l\,,$$

$$y = r \operatorname{sen} L \cos l\,,$$

$$z = r \operatorname{sen} l\,;$$

ove L *ed* l *sono la longitudine e latitudine eliocentrica.*

Per determinare le due costanti, si supponga il pianeta nel nodo: in tal posizione $L = \Upsilon$, $z = 0$, $l = 0$, *e si ha*

$$B = -\frac{Ax}{y} = -A\frac{\cos \Upsilon}{\operatorname{sen} \Upsilon}$$

Sia poi il pianeta nella massima latitudine eliocentrica: sarà $L = 90° + \Upsilon$, $l = i$ *: quindi sostituendo questi valori delle coordinate angolari, l'equazione del piano diventa*

$$r \operatorname{sen} i = rA \cos i \cos(90° + \Upsilon) + rB \cos i \operatorname{sen}(90° + \Upsilon),$$

che dà

$$\tan g\, i = B \cos \Upsilon - A \operatorname{sen} \Upsilon\,;$$

sostituendo in questa il valore di B *e riducendo, si ha*

$$B = \tan i \cos \Upsilon,$$

e quindi

$$A = -\operatorname{tg} i \operatorname{sen} \Upsilon,$$

e l'equazione cercata

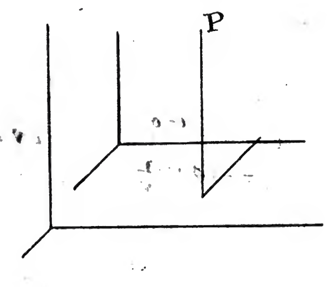
$$z = y \tan i \cos \Upsilon - x \operatorname{tg} i \operatorname{sen} \Upsilon.$$

Problema II. – Conosciuta la posizione del piano dell'orbita e le coordinate geocentriche dell'astro, determinare le sue coordinate eliocentriche. –

Siano x, y, z *le coordinate eliocentriche del pianeta:* X, Y, Z *quelle similmente eliocentriche della terra;* ξ, η, ζ *le geocentriche del pianeta: sarà sempre*

$$(\alpha) \quad x = X + \xi \;, \quad y = Y + \eta \;, \quad z = Z + \zeta \,.$$

Se il piano coordinato assunto per fondamentale sia l'ecclittica, saranno



$$x = r \cos L \cos l,$$

$$y = r \operatorname{sen} L \cos l,$$

$$z = r \operatorname{sen} l,$$

$$\xi = \rho \cos \Lambda \cos \lambda,$$

$$\eta = \rho \operatorname{sen} \Lambda \cos \lambda,$$

$$\zeta = \rho \operatorname{sen} \lambda.$$

Sia R *il raggio vettore della terra,* ♂ *la sua longitudine;*

$$X = R \cos ♂ = R \cos (180^\circ + \odot) = -R \cos \odot,$$

$$Y = -R \operatorname{sen} \odot.$$

Quindi le equazioni

$$
(b)\quad \left\{
\begin{array}{l}
r\cos L\cos l = \zeta\cos\Lambda\cos\lambda - R\cos\Theta, \\
r\,\mathrm{sen}\,L\cos l = \zeta\,\mathrm{sen}\,\Lambda\cos\lambda - R\,\mathrm{sen}\,\Theta, \\
r\,\mathrm{sen}\,l = \zeta\,\mathrm{sen}\,\lambda \quad , \quad \rho = \zeta\cos\lambda, \\
\text{che unite a quella del piano, cioè} \\
\rho\,\mathrm{tg}\,\lambda = \rho\,\mathrm{tg}\,i\,\mathrm{sen}(\Lambda - ♈) - R\,\mathrm{tg}\,i\,\mathrm{sen}(\Theta - ♈).
\end{array}
\right.
$$

Da queste equazioni, trovato prima ρ *dall'ultima si avrà* ζ *, donde* r, L *ed* l *dalle altre tre.*

2ª Soluzione. — *Più spedita però è la soluzione seguente. Si faccia girare l'asse delle* x *finchè coincida colla linea dei nodi del pianeta; tutte le longitudini diminuiranno di* ♈, *cioè saranno*

$$L - ♈ \quad , \quad \Lambda - ♈ \quad , \quad \Theta - ♈ .$$

Sia inoltre N *la distanza del pianeta dal nodo; le tre coordinate del pianeta relativamente ai nuovi assi potranno esprimersi così*

$$x' = r\cos N \quad , \quad y' = r\,\mathrm{sen}\,N\cos i ,$$

$$z' = r\,\mathrm{sen}\,N\,\mathrm{sen}\,i :$$

quindi le tre equazioni (a) *diventeranno*

$$
(c)\quad \left\{
\begin{array}{l}
r\cos N + R\cos(\Theta - ♈) = \zeta\cos\lambda\cos(\Lambda - ♈), \\
r\,\mathrm{sen}\,N\cos i + R\,\mathrm{sen}(\Theta - ♈) = \zeta\cos\lambda\,\mathrm{sen}(\Lambda - ♈) \\
r\,\mathrm{sen}\,N\,\mathrm{sen}\,i = \zeta\,\mathrm{sen}\,\lambda .
\end{array}
\right.
$$

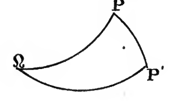
Si moltiplichi la prima di queste equazioni per $\mathrm{sen}(\Theta - ♈)\,\mathrm{sen}\,\lambda$,

la seconda per $-\cos(\odot-\Upsilon)\,\mathrm{sen}\,\lambda$, *e la terza per* $+\,\mathrm{sen}(\Lambda-\odot)\cos\lambda$; *sommando i prodotti si caverà*

$$\mathrm{tang}\,N=\frac{\mathrm{sen}(\odot-\Upsilon)\,\mathrm{sen}\,\lambda}{\cos i\cos(\odot-\Upsilon)\,\mathrm{sen}\,\lambda+\mathrm{sen}\,i\,\mathrm{sen}(\odot-\lambda)\times\cos\lambda}:$$

moltiplicando la prima per $\mathrm{sen}(\Lambda-\Upsilon)$, *la seconda per* $-\cos(\Lambda-\Upsilon)$ *e sommando i prodotti, si ha*

$$r=\frac{R\,\mathrm{sen}(\odot-\Lambda)}{\mathrm{sen}\,N\cos i\cos(\Lambda-\Upsilon)-\cos N\,\mathrm{sen}(\Lambda-\Upsilon)}$$



Il triangolo sferico poi $P☊P'$ *darà*

$$\mathrm{tang}(L-\Upsilon)=\mathrm{tg}\,P'☊=\mathrm{tg}\,P☊\cos i$$
$$=\mathrm{tang}\,N\cos i,$$
$$\mathrm{tang}\,l=\mathrm{tang}\,i\,\mathrm{sen}(L-\Upsilon),$$
$$\mathrm{sen}\,l=\mathrm{sen}\,i\,\mathrm{sen}\,N,$$

che danno L *ed* l.

Problema III. — Date le coordinate eliocentriche, trovare le geocentriche.—

Le coordinate eliocentriche date sono L, l, r *: dagli elementi dell'orbita si ha* Υ, i, *e quindi* N *dall'equazione*

$$\mathrm{sen}\,N=\frac{\mathrm{sen}\,l}{\mathrm{sen}\,i},$$

e dall'epoca dell'osservazione R *e* $\odot$. *Quindi le equazioni superiori* (c) *daranno le tre equazioni*

$$\mathrm{tang}(\Lambda-\Upsilon)=\frac{r\,\mathrm{sen}\,N\cos i+R\,\mathrm{sen}(\odot-\Upsilon)}{r\cos N+R\cos(\odot-\Upsilon)},$$

$$\rho = \zeta \cos\lambda = \frac{r\cos N - R\cos(\odot - \Upsilon)}{\cos(A - \Upsilon)} ,$$

$$\tan\lambda = \frac{r \operatorname{sen} N \operatorname{sen} i}{\rho} .$$

Ottenuta la longitudine e latitudine geocentrica, si avrà facilmente l'ascensione retta e la declinazione colle solite formole.

Problema IV. — Dati tre raggi vettori e gli angoli da essi compresi, determinare gli elementi dell'orbita.

Gli angoli compresi si dedurranno dagli aumenti di longitudine. L'equazione dell'ellisse

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(L - \pi)}$$

somministra le tre equazioni

$$\left(\frac{p}{r} - 1\right) = e\cos(L - \pi) ,$$

$$\left(\frac{p}{r'} - 1\right) = e\cos(L' - \pi) ,$$

$$\left(\frac{p}{r''} - 1\right) = e\cos(L'' - \pi) .$$

Si moltiplichi la prima per $\operatorname{sen}(L'' - L')$ *la seconda per* $-\operatorname{sen}(L'' - L)$, *la terza per* $\operatorname{sen}(L' - L)$ *: si faccia la somma dei prodotti, e si troverà mediante la formola*

$$2\cos a \operatorname{sen} b = \operatorname{sen}(a + b) - \operatorname{sen}(a - b)$$

che il coefficiente di e *è uguale a zero, e resterà*

$$p\left(\frac{\operatorname{sen}(L'' - L')}{r} - \frac{\operatorname{sen}(L'' - L)}{r'} + \frac{\operatorname{sen}(L' - L)}{r''}\right)$$

$$= \operatorname{sen}(L'' - L') - \operatorname{sen}(L'' - L) + \operatorname{sen}(L' - L)$$

$$= 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(L'' - L')\cos\tfrac{1}{2}(L'' - L') - 2\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}(L'' - L')\cos\left(\frac{L' + L''}{2} - L\right) =$$

$$= 2\,sen\tfrac{1}{2}(L''-L')\left[\cos\tfrac{1}{2}(L''-L') - \cos\left(\tfrac{L''+L'}{2} - L\right)\right]$$

$$= 4\,sen\tfrac{1}{2}(L''-L')\,sen\tfrac{1}{2}(L'-L)\,sen\tfrac{1}{2}(L''-L).$$

Moltiplicando i due membri per $rr'r''$ si avrà

$$p = \frac{4rr'r''\,sen\frac{1}{2}(L'-L)\,sen\frac{1}{2}(L''-L')\,sen\frac{1}{2}(L''-L)}{rr'sen(L'-L) - rr''sen(L''-L) + r'r''sen(L''-L')};$$

il denominatore contiene l'espressione delle tre aree triangolari comprese tra la corda e il primo e secondo raggio vettore, tra il primo e il terzo, e tra il secondo e il terzo: sottraendo quella di mezzo dalle altre due, resta l'area del triangolo compreso fra le tre corde.

Dividendo una per l'altra delle prime, si caverà una espressione della forma

$$\frac{\cos(L-\pi)}{\cos(L'-\pi)} = \tang\varphi,$$

dalla quale si avrà π; e finalmente da una delle altre si avrà e.

Problema V. – Dati gli elementi dell'orbita, trovare la posizione apparente del pianeta. —

Per trovare la posizione di un pianeta dietro i suoi elementi, si procederà come segue.

Conosciuta l'epoca c degli elementi, cioè la longitudine media del pianeta nel tempo a cui sono riferiti, si troverà primieramente la differenza t di tempo tra l'epoca degli elementi e quella delle osservazioni; e preso il moto medio n, si farà il prodotto nt, che aggiunto all'epoca c darà

$$z = nt + c$$

anomalia media pel tempo dell'osservazione. Con questa

si calcoli l'anomalia eccentrica colla formola

$$z = nt + c = x - e\,\mathrm{sen}\,x \quad ,$$

e poi la vera da

$$\mathrm{tang}\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}x \ ,$$

ed il raggio vettore da

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v} = a(1-e\cos x) \ .$$

A v aggiunto π, si avrà la longitudine del pianeta nell'orbita

$$L_o = v + \pi \ ,$$

e sottratto ν da questa, si avrà

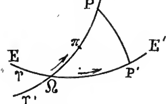
$$N = L_o - \nu = v + \pi - \nu \ .$$

Quindi colle formole

$$\mathrm{sen}\,l = \mathrm{sen}\,i\,\mathrm{sen}\,N \, ,$$

$$\mathrm{tg}(L-\nu) = \mathrm{tg}N\cos i$$

si avranno l ed L, donde con r, Λ e λ dal problema, e poi α e δ.



Si avverta che la longitudine del perielio si prende sull'orbita prendendo sul piano di questa un arco ♈'☊ = alla longitudine del nodo cioè ♈☊.

Le posizioni così trovate saranno le medie relative all'equinozio dell'epoca degli elementi: per ridurle all'equinozio dell'osservazione si aggiungeranno le piccole correzioni dell'aberrazione, nutazione e precessione.

19.

CAPO IV.

Della Gravitazione universale

TUTTE *le leggi del moto dei pianeti conosciute sotto il nome di leggi di Keplero sono una mera conseguenza del principio della gravitazione universale, e servono a dimostrare questa stessa legge fondamentale, per la quale tutte possono riepilogarsi in questo principio* : tutti i corpi celesti si muovono in modo che la loro accelerazione verso il centro di moto è in ragion diretta della massa, e inversa del quadrato della distanza.

Per dimostrare questa proposizione supponiamo noti alcuni principii dalla meccanica generale

1.° *La velocità* v *di un mobile in un punto qualunque della sua orbita descritta con moto vario, si esprime per* $v = \frac{ds}{dt}$: *ove* ds *è l'elemento infinitesimo dell'arco curvilineo, e* dt *il tempuscolo corrispondente.*

2.° *Sia* φ *l'accelerazione (che dicesi anche forza acceleratrice) che una forza sollecitante un punto materiale può produrre nell'unità di tempo : essa nel tempuscolo infinitesimo* dt *produrrà una velocità* dv *e si avrà*

$$dt : dv = 1 : \varphi,$$

donde

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} .$$

3.° *Se la forza* φ *si risolva in tre parallele a tre assi orto-*

gonali, chiamati α, β, γ gli angoli che essa fa coi medesimi assi, avremo in generale

$$X=\varphi\cos\alpha \quad , \quad Y=\varphi\cos\beta \quad , \quad Z=\varphi\cos\gamma .$$

4. Se r è il raggio vettore del mobile, i coseni degli angoli del raggio medesimo saranno espressi da

$$\cos\alpha=\frac{x}{r} \quad , \quad \cos\beta=\frac{y}{r} \quad , \quad \cos\gamma=\frac{z}{r} :$$

quindi se la forza sia diretta secondo il raggio vettore, le tre componenti saranno

$$X=\pm\varphi\frac{x}{r} \quad , \quad Y=\pm\varphi\frac{y}{r} \quad , \quad Z=\pm\varphi\frac{z}{r} ;$$

e considerando ciascuna componente come una forza acceleratrice indipendente, si avrà

$$X=\frac{d^2x}{dt^2} \quad , \quad Y=\frac{d^2y}{dt^2} \quad , \quad Z=\frac{d^2z}{dt^2} .$$

5. Nel caso pertanto che la forza si diriga secondo un centro fisso, lungo il raggio vettore del mobile, varranno queste equazioni

$$(a) \quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\varphi x}{r} \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\varphi y}{r} \quad , \quad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\varphi z}{r} .$$

6. Si moltiplichi la prima di queste equazioni per y, la seconda per x, e si sottraggano; poi la seconda per z, e la terza per y, e si sottraggano similmente; e infine la prima per z e la terza per x, e si faccia pure la sottrazione: si avranno le tre equazioni seguenti

$$(b) \quad \begin{cases} ydx-xdy=C'dt , \\ zdy-ydz=C''dt , \\ xdz-zdx=C'''dt . \end{cases}$$

7.° Queste equazioni sommate dopo essere state successivamente moltiplicate la prima per z, la seconda per x e la terza per y, danno

$$C'z + C''x + C'''y = 0 ,$$

che essendo l'equazione al piano che passa per l'origine delle coordinate, mostra che quando la forza è diretta a un centro fisso la curva è sempre piana.

8.° I primi membri delle stesse equazioni (b) esprimono le proiezioni sui rispettivi piani coordinati della doppia area descritta dal raggio vettore nello spazio: infatti sostituendo p.e. nella prima le coordinate polari

$$x = r\cos\omega \quad , \quad y = r\,\mathrm{sen}\,\omega$$

si ha

$$dx = dr\cos\omega - r\,\mathrm{sen}\,\omega\, d\omega ,$$

$$dy = dr\,\mathrm{sen}\,\omega + r\cos\omega\, d\omega ;$$

e fatti i prodotti, si ha

$$x\,dy - y\,dx = r^2 d\omega ,$$

che è il doppio dell'area del settore infinitesimo descritto sul piano xy nel tempuscolo dt.

9.° Quindi indicando con σ queste aree, sarà

$$d\sigma' = C'dt \quad , \quad d\sigma'' = C''dt \quad , \quad d\sigma''' = C'''dt ,$$

e integrando

(c) $$\sigma' = C't + C_1 \text{ , \&c.}$$

Quindi il teorema che ogniqualvolta la forza è diretta ad un centro fisso, le aree descritte dal raggio vettore sono proporzionali ai tempi.

10.° Viceversa se le aree descritte dal raggio vettore sono proporzionali ai tempi, la forza sarà diretta al centro delle aree. *Infatti posta l'equazione* (c) *ne seguono le equazioni* (b), *le quali differenziate danno*

$$\frac{yd^2x}{dt^2}-\frac{xd^2y}{dt^2}=0 \quad ,$$

e sostituendo per le derivate seconde le componenti di cui sono le rappresentanti, si avrà

$$yX-Yx=0 \; ,$$

donde

$$\frac{x}{y}=\frac{X}{Y} \; :$$

cioè le componenti saranno proporzionali ai lati del rettangolo delle coordinate; e quindi la risultante proporzionale alla diagonale che è il raggio, e però coinciderà con esso anche in direzione; onde &c.

Ciò premesso, ci proponiamo di sciogliere il seguente problema generale: Data la natura della curva piana, trovare l'espressione della forza acceleratrice.

Soluzione. *Preso il piano della curva per quello delle coordinate, e posto che la curva volti la concavità all'origine, si avrà*

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-X \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2}=-Y \; .$$

Si moltiplichi la prima per dx *e la seconda per* dy, *e si sommino; avremo*

$$\frac{dx.d^2x}{dt^2}+\frac{dy.d^2y}{dt^2}+Xdx+Ydy=0 \; ,$$

ed integrando

$$0=\frac{dx^2+dy^2}{dt^2}+2\int(Xdx+Ydy)\,.$$

La costante C si sottintende compresa nell'integrale.

La prima equazione (b) ci dà

$$dt=\frac{xdy-ydx}{C}\,,$$

il qual valore sostituito nella formola precedente somministra

$$\frac{C^2(dx^2+dy^2)}{(xdy-ydx)^2}+2\int(Xdx+Ydy)=0\,.$$

Questa equazione dà la relazione cercata, ma è incomoda a trattarsi; e perciò è bene eliminare le componenti X, Y, *e fare apparire la risultante* φ, *trasformando tutto in coordinate polari; per le quali avremo*

$$x=r\cos v\,,\qquad r=\sqrt{x^2+y^2}\,,$$

$$y=r\,\mathrm{sen}\,v\,,\qquad dx^2+dy^2=r^2dv^2+dr^2,$$

$$X=\varphi\cos v,\qquad xdy-ydx=r^2dv,$$

$$Y=\varphi\,\mathrm{sen}\,v,\qquad Xdx+Ydy=\varphi dr\,.$$

E dopo sostituiti questi valori, l'equazione diventa

$$(c')\qquad \frac{C^2(r^2dv^2+dr^2)}{r^4dv^2}+2\int\varphi dr=0\,.$$

Questa equazione si può scrivere anche in quest'altro modo

$$\frac{C^2}{r^2}+C^2\left(\frac{dr^2}{r^4dv^2}\right)+2\int\varphi dr=0,$$

che differenziata per eliminare l'integrale ci somministra

$$\frac{C^2}{r^3} - \frac{C^2}{2} \cdot \frac{d\left(\frac{dr^2}{r^4 dv^2}\right)}{dr^2} = \varphi,$$

la quale può ridursi facilmente alla forma seguente

(d) $$\varphi = \frac{C^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2}\right).$$

Questa è la formola cercata, che dà la forza acceleratrice φ per le coordinate della curva.

Nel caso dei pianeti la curva essendo una ellisse, si ha

(e) $$r = \frac{a(1-e^2)}{1 - e\cos(v-\pi)},$$

donde si cava

$$\frac{1}{r} = \frac{1 - e\cos(v-\pi)}{a(1-e^2)},$$

e le derivate successive di $\frac{1}{r}$ *saranno*

$$d\frac{1}{r} = \frac{e\,sen(v-\pi)}{a(1-e^2)}\,dv,$$

$$d^2\frac{1}{r} = \frac{e\cos(v-\pi)}{a(1-e^2)}\,dv^2:$$

fatte le sostituzioni nella formola (d), si ottiene

$$\varphi = \frac{C^2}{a(1-e^2)} \cdot \frac{1}{r^2}:$$

cioè quando un mobile descrive un'ellisse, la forza è in ragione inversa del quadrato delle distanze; e *sic_come la formola (e) può rappresentare qualunque sezione conica, il teorema è vero anche per* qualsiasi altra curva di questo genere.

*La quantità C esprimendo il rapporto del doppio dell'a_*

rea descritta dal raggio al tempo impiegato a descriverla, si esprimerà per l'area dell'ellisse A, e pel tempo dell'intera rivoluzione a questo modo

$$C = \frac{2A}{T} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{T},$$

il qual valore sostituito nella espressione di φ darà

$$\varphi = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2},$$

e per un altro pianeta

$$\varphi' = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} \cdot \frac{1}{r'^2}.$$

Quinde se abbia luogo la proporzione

(f) $$\frac{a'^3}{T'^2} = \frac{a^3}{T^2},$$

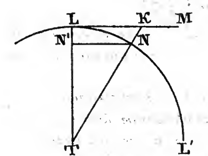
resterà il rapporto

$$\varphi : \varphi = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{r'^2};$$

cioè le forze acceleratrici saranno in semplice ragione inversa del quadrato delle distanze.

Il rapporto (f) fu trovato da Keplero aver luogo in effetto, almeno prossimamente nel sistema solare; quindi ne segue che i pianeti sono spinti tutti colla medesima forza verso il sole, e che il suo valore assoluto varia solo per la diversa distanza. La forza che rattiene i satelliti attorno i pianeti primarii è della stessa specie, perchè anche essi descrivono ellissi come fa la luna attorno la terra, e il raggio vettore descrive aree proporzionali ai tempi. Questa forza poi chiamasi gravitazione o gravità, perchè non è altro che quella stessa forza che attira i gravi

alla superficie della terra, diminuita in ragione del quadrato della distanza. Questo si prova facilmente, dimostrando che tutti i gravi posti alla distanza lunare cadrebbero di là verso la terra in un secondo di tempo di quanto la luna si sposta dalla tangente della sua orbita, che è appunto lo spazio che misura l'energia di questa forza. Ciò si dimostra più facilmente a quest'altro modo.



Sia T il centro della terra, LL' l'orbita lunare: dai principii di meccanica si sa che la misura della forza sollecitante la luna è espressa dallo spazio NK, o (per la piccolezza dell'arco LN) dal suo uguale LN'. Ora supponendo l'orbita lunare circolare, si ha

$$LN' = \frac{NN'^2}{2R},$$

essendo R il raggio medio dell'orbita: lo spazio LN' dietro le misure dell'orbita $= 15$ piedi per l'arco descritto in un minuto primo di tempo: ora pei gravi cadenti alla superficie della terra si ha pure lo spazio di quindici piedi, ma in un solo minuto secondo: quindi avremo

$$S : S' = gt^2 : g't'^2,$$

e se g è la gravità alla superficie terrestre, g' quella alla distanza lunare, fatto $t' = 60t = 60''$, si avrà

$$15^p : 15^p = g(1'')^2 : g(60'')^2,$$

donde

$$g : g' = 60^2 : 1^2 ;$$

ma per la distanza lunare $R = 60r$; (essendo r il raggio terrestre) abbiamo quindi

$$60^2 : 1^2 = R^2 : r^2 ;$$

dunque

$$g : g' = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{R^2} :$$

cioè che la gravità alla distanza lunare sta alla gravità sulla superficie terrestre in ragione inversa del quadrato delle distanze.

Siccome poi la gravità terrestre è proporzionale alle masse dei corpi, così ne segue che anche la gravità celeste sarà proporzionale alle masse dei corpi celesti, e in generale la sua azione dovrà esprimersi per

$$\varphi = \frac{mK}{r^2} ,$$

essendo K il coefficiente che esprime l'attrazione de 'unità di massa all'unità di distanza. Quindi la terza legge di Keplero non può essere esatta, se le masse non siano uguali per tutti i pianeti; e infatti essa non è vera che approssimativamente.

Che questa forza poi non sia proprietà esclusiva dei corpi considerati come celesti ma di tutta la materia, si prova dalle esperienze fatte sulle attrazioni delle montagne che deviano il filo a piombo, e dalle attrazioni esercitate da grandi masse di piombo sulla bilancia di torsione come trovò Cavendish, e confermarono altri dopo di lui. Il flusso e riflusso del mare dimostra l'azione reciproca della luna sulle acque e il loro gravi-

tare sul nostro satellite e sul sole stesso. Finalmente le perturbazioni che soffrono la luna e i pianeti per la loro azione reciproca mostra questa universalità di azione, sulla quale fondati gli astronomi hanno potuto calcolare le masse dei satelliti, e trovare anche pianeti non prima conosciuti, come avvenne non ha molto per Nettuno. Finalmente i moti delle stelle doppie mostrano che questa forza si estende oltre il nostro sistema planetario, e perciò dicesi UNIVERSALE.

Resta ora a vedere se l'ellisse o le sezioni coniche siano le sole orbite che possano descrivere i pianeti in virtù di questa forza. Perciò scioglieremo a tal fine il seguente

Problema. — Data la forza centrale operante in una data ragione delle distanze, determinare la curva che dovrà descrivere il mobile. —

Si riprenda l'equazione (c')

$$\frac{H^2(r^2dv^2+dr^2)}{r^4dv^2}+2\int\varphi dr=0,$$

dove si pone H invece di C. Essendo $\varphi=\frac{K}{r^2}$, sostituendo ed integrando avremo

$$\frac{H^2dr^2+r^2dv^2}{r^4dv^2}-\frac{2K}{r}=D:$$

questa equazione può scriversi anche così

$$\frac{\left(d\frac{1}{r}\right)^2}{dv^2}=\frac{D}{H^2}+\frac{2K}{rH^2}-\frac{1}{r^2},$$

quindi

$$dv = \frac{d\frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{D}{H^2} - \frac{2K}{H^2}\cdot\frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}}},$$

che si trasforma nella seguente, aggiungendo un termine costante sotto il differenziale, e compiendo il quadrato perfetto del denominatore, aggiungendo e togliendo la quantità $\frac{K^2}{H^4}$ *per ridurre tutto alla forma* $\frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}$;

$$dv = \frac{\dfrac{d\left(\frac{K}{H^2} - \frac{1}{r}\right)}{\sqrt{\frac{D}{H^2} + \frac{K^2}{H^4}}}}{\sqrt{1 - \dfrac{\left(\frac{K}{H^2} - \frac{1}{r}\right)^2}{\frac{D}{H^2} + \frac{K^2}{H^4}}}}.$$

Questa per la forma suddetta ha per integrale

$$v = arc\left(\cos = \frac{\frac{K}{H^2} - \frac{1}{r}}{\sqrt{\frac{D}{H^2} + \frac{K^2}{H^4}}}\right) + \pi ;$$

quindi

$$\frac{1}{r} = \frac{K}{H^2} - \sqrt{\frac{D}{H^2} - \frac{K^2}{H^4}}\cdot\cos\left(v - \pi\right),$$

che può ridursi a

$$r = \frac{\frac{H^2}{K}}{1 - \sqrt{\frac{DH^2}{K^2} + 1} \cdot \cos(v - \pi)} .$$

Questa equazione rappresentando tutte le sezioni coniche, ne segue che per la forza suddetta potrà descriversi una qualunque di quelle curve, ma la sua natura dipenderà dalla intensità della forza, e l'eccentricità dalla direzione dell'impulso primitivo. Infatti paragonando l'equazione generale delle coniche coll'ultima equazione, avremo

$$\frac{H^2}{K} = a(1 - e^2) ,$$

donde

$$e = \sqrt{\frac{DH^2}{K^2} + 1} ;$$

quindi

$$H = \sqrt{Ka(1 - e^2)} \quad , \quad D = -\frac{K}{a} .$$

Ora l'equazione

$$\frac{dr^2 + r^2 dv^2}{dt^2} = 2\frac{K}{r} + D ,$$

il cui primo primo membro è realmente $=$

$$\frac{ds^2}{dt^2} = v^2 = \frac{2K}{r} - \frac{K}{a} ,$$

ci mostra che a cioè il semiasse della curva dipende dalla velocità iniziale. E' siccome

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{dr^2}{dt} + \frac{r^2 dv^2}{dt^2} ,$$

e si ha decomponendo la velocità secondo il raggio vettore

$$\frac{dr}{d\theta} = V\cos\theta\,,$$

quindi quadrando e sostituendo, sarà

$$V^2 - V^2\cos^2\theta = \frac{r^2 dv^2}{dt^2}\,;$$

donde

$$rV\operatorname{sen}\theta = \frac{r^2 dv}{dt} = H = \sqrt{K(1-e^2)a}\,,$$

e finalmente

$$rV\operatorname{sen}\theta = \sqrt{K(1-e^2)a}\,:$$

vale a dire che l'eccentricità e dipenderà dall'angolo v di proiezione primitiva.

Resta a determinare la relazione tra il tempo e le coordinate dell'astro. A tal fine riassumendo l'equazione

$$\frac{dr^2 + r^2 dv^2}{dt^2} = \frac{2K}{r} - \frac{K}{a}\,,$$

in luogo di v si sostituisca il suo valore

$$dv = \frac{H\,dt}{r^2} = \frac{\sqrt{Ka(1-e^2)}\,dt}{r^2}\,,$$

avremo

$$\frac{dr^2}{dt^2} = K\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a} - \frac{a(1-e^2)}{r^2}\right];$$

questa moltiplicata per r^2 dà

$$\frac{r^2 dr^2}{dt^2} = K\left[2r - \frac{r^2}{a} - a(1-e^2)\right];$$

donde

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{\frac{K}{a}\left(2ra - r^2 - a^2 + a^2e^2\right)}} = \sqrt{\frac{a}{K}} \times \frac{r\,dr}{\sqrt{ae^2 - (a-r)^2}}\,.$$

In questa equazione si metta $a-r=ae\cos\psi$, ossia $r=a(1-e)\cos\psi$; avremo

$$dt=\sqrt{\frac{a^3}{K}}\left(1-e\cos\psi\right)d\psi\ ;$$

donde

$$t=\sqrt{\frac{a^3}{K}}\left(\psi-e\,sen\,\psi\right)+C,$$

che è l'equazione già trovata per altra via tra l'anomalia media e l'eccentrica. Quindi si conclude che la sola maniera possibile di sciogliere il problema è quella già indicata da Keplero.

Essendo che tutte le curve coniche possano descriversi dai corpi celesti, lasciando l'iperbola, supporremo che il moto si faccia in una parabola, che è il caso più approssimato delle comete, le cui orbite realmente ellittiche ma allungatissime si confondono colla parabola.

L'equazione

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos(v-\pi)}$$

appartiene ad una parabola, se si faccia $a=\infty$ ed $e=1$, e si rappresenti il prodotto $a(1-e^2)$ per $2q$. Quindi l'equazione alla parabola sarà

$$r=\frac{2q}{1-\cos(v-\pi)}=\frac{2q}{1+\cos(v-\pi)}=\frac{2q}{2\cos^2\frac{1}{2}(v-\pi)}=$$

$$\frac{q}{\cos^2\frac{1}{2}(v-\pi)}\ ;$$

dalla comparazione delle formole precedenti sarà

$$\frac{H^2}{K}=2q \qquad e \qquad q=\frac{1}{2}\frac{H^2}{K}.$$

Fatto $v=\pi$ *nella equazione alla parabola, allora la cometa starà nel perielio, nel qual caso si ha pure* $r=q$.

Per determinare la posizione della cometa nell'orbita si avrà dalla equazione solita delle aree $r^2dv=Hdt$ *la seguente*

$$dt=\frac{r^2dv}{H}=\frac{q^2dv}{H\cos^4\frac{1}{2}(v-\pi)}=$$

$$\frac{q^2}{\sqrt{2Kq}}\times\frac{2d\frac{1}{2}(v-\pi)}{\cos^2\frac{1}{2}(v-\pi)\cos^2\frac{1}{2}(v-\pi)}=$$

$$\frac{q^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}K}}\left[1+\tan^2\frac{1}{2}(v-\pi)\,d.\tan\frac{1}{2}(v-\pi)\right];$$

che integrata somministra

$$t=\frac{q^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}K}}\cdot\tan\frac{1}{2}(v-\pi)\left[1+\frac{1}{3}\tan\frac{1}{2}(v-\pi)\right]+t_0;$$

fatto $v=\pi$, $v-\pi=0$, *è* $t_0=0$.

Per un altra parabola si cava una simile equazione; donde

$$\frac{t}{t'}=\frac{q^{\frac{3}{2}}}{q'^{\frac{3}{2}}},$$

la qual formola tiene il luogo della terza legge di Keplero, e per mezzo di essa dalla posizione calcolata per una parabola può passarsi a quella di un altra parabola qualunque.

CAPO V.

Del Sole

PER le particolarità fisiche del Sole v. il Quadro Fisico art. I.

Il rapporto fra la massa solare e quella dei Pianeti provveduti di Satelliti si ha facilmente così. La forza attrattiva del sole su di un Pianeta si esprime per

$$\varphi = \frac{M+m}{r^2} = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2},$$

donde

$$M+m = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2};$$

e per un pianeta col suo satellite si avrà,

$$m+\mu = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2};$$

dividendo l'una per l'altra queste equazioni e trascurando la massa m del pianeta rapporto al Sole, e quella del satellite μ rapporto al pianeta primario, sarà; facendo la massa solare = 1,

$$m = \frac{T^2}{T'^2} \cdot \frac{a'^3}{a^3}.$$

Per la terra questa proporzione non può farsi, essendo la luna troppo grande, ma invece conoscendo noi che la gravità $g = \frac{m}{R^2}$, avremo

$$\frac{M+m}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{gR^2 T^2};$$

donde trascurando m nel numeratore e mettendo m = 1,

$$m = \frac{gR^2 T^2}{4\pi^2 a^3}.$$

$$\frac{H^2}{K}=2q \qquad e \qquad q=\frac{1}{2}\frac{H^2}{K}.$$

Fatto $v=\pi$ nella equazione alla parabola, allora la cometa starà nel perielio, nel qual caso si ha pure $r=q$.

Per determinare la posizione della cometa nell'orbita, si avrà dalla equazione solita delle aree $r^2dv=Hdt$ la seguente

$$dt=\frac{r^2dv}{H}=\frac{q^2dv}{H\cos^4\frac{1}{2}(v-\pi)}=$$

$$\frac{q^2}{\sqrt{2Kq}}\times\frac{2d\frac{1}{2}(v-\pi)}{\cos^2\frac{1}{2}(v-\pi)\cos^2\frac{1}{2}(v-\pi)}=$$

$$\frac{q^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}K}}\left[1+\text{tang}^2\frac{1}{2}(v-\pi)\,d.\text{tang}\frac{1}{2}(v-\pi)\right];$$

che integrata somministra

$$t=\frac{q^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}K}}\cdot\text{tang}\frac{1}{2}(v-\pi)\left[1+\frac{1}{3}\text{tang}\frac{1}{2}(v-\pi)\right]+t_0:$$

fatto $v=\pi$, $v-\pi=0$, è $t_0=0$.

Per un altra parabola si cava una simile equazione: donde

$$\frac{t}{t'}=\frac{q^{\frac{3}{2}}}{q'^{\frac{3}{2}}},$$

la qual formola tiene il luogo della terza legge di Keplero, e per mezzo di essa dalla posizione calcolata per una parabola può passarsi a quella di un altra parabola qualunque.

CAPO V.

Del Sole

PER le particolarità fisiche del Sole v. il Quadro Fisico art. I.

Il rapporto fra la massa solare e quella dei Pianeti provveduti di Satelliti si ha facilmente così. La forza attrattiva del sole su di un Pianeta si esprime per

$$\varphi = \frac{M+m}{r^2} = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} ,$$

donde

$$M+m = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2};$$

e per un pianeta col suo satellite si avrà,

$$m+\mu = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2};$$

dividendo l'una per l'altra queste equazioni e trascurando la massa m del pianeta rapporto al Sole, e quella del satellite μ rapporto al pianeta primario, sarà, facendo la massa solare $=1$,

$$m = \frac{T^2}{T'^2} \cdot \frac{a'^3}{a^3} .$$

Per la terra questa proporzione non può farsi, essendo la luna troppo grande, ma invece conoscendo noi che la gravità $g = \frac{m}{R^2}$, avremo

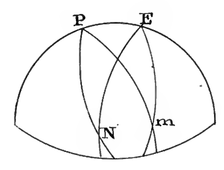
$$\frac{M+m}{m} = \frac{4\pi^2 a^3}{g R^2 T^2} :$$

donde trascurando m nel numeratore e mettendo $M=1$,

$$m = \frac{g R^2 T^2}{4\pi^2 a^3} .$$

Il sole ha un moto di rotazione, e dall' osservazione delle macchie può trovarsi tanto la posizione dell'equatore quanto il tempo della sua rotazione: la terra sta nel nodo dell'equatore solare coll'ecclittica quando le macchie descrivono una linea retta, e dalla massima apertura dell'ellisse in cui si proiettano quando la terra sta a 90° dal nodo: si cavano facilmente i due elementi determinanti la posizione del piano dell' equatore solare.

Sia P il polo di rotazione del Sole, E quello dell'ecclittica, m la macchia, N la longitudine del nodo n, λ ed L la latitudine e longitudine della macchia e D la latitudine eliocentrica.



$$\cos Pm = \cos Em \cos PE + \sin Em \sin PE \cos PEm$$

$$= \sin\lambda \cos\lambda \sin i \cos(90° + NEm),$$

$$m \cos(90° + NEm) = -\sin NEm = \sin(L-N);$$

donde svolgendo e dividendo per $\cos i$ e ponendo $90° - Pm = D$,

$$\left(\frac{\sin D}{\cos i}\right) = \sin\lambda - \cos\lambda\,(tg\, i \cos N) + \cos\lambda \cos L\,(tang\, i\, sen\, N).$$

Questa equazione contiene tre incognite $\frac{\sin D}{\cos i} = x$, $tg\, i \cos N = y$; $tang\, i \sin N = z$; determinate le quali, facilmente si han-

no D, i, N, essendo $\tang N = \frac{z}{y}$, $\tang i = \frac{z}{\sin N} = \frac{y}{\cos N}$.

Si scriva l'equazione sotto la forma

$$(\alpha) \qquad x = A + By + Cz,$$

e si facciano almeno tre osservazioni della stessa macchia in giorni diversi: si avranno tre equazioni della forma (α), donde si caveranno le incognite.

E' bene moltiplicare le osservazioni oltre a tre, ma allora il problema essendo più che determinato, si scioglieranno le equazioni col metodo de' minimi quadrati che è il seguente.

Date quante si voglia equazioni della forma

$$ax + by + cz + \dots\dots + m = 0,$$

$$a'x + b'y + c'z + \dots\dots + m' = 0,$$

$$a''x + b''y + c''z + \dots\dots + m'' = 0,$$

in numero maggiore delle incognite, è evidente che il valore dedotto da 3 sole qualunque dovrebbe soddisfare a tutte le altre poichè spettano al medesimo problema, se i dati di osservazione da cui dipendono fossero esattissimi; ma ciò non accade mai; onde vi sarà certamente una differenza, e i primi membri non verranno mai identici a 0. Ciò provenendo dagli errori di osservazione, potremo indicare i residui per ε: ora si assume che la miglior soluzione sarà quella che renderà la somma di tali errori la minima possibile; e siccome gli errori possono essere $+ vi$, o $- vi$, si dovranno alzare al quadrato i secondi membri, e fare che la somma di questi sia un

un minimo, cioè

$$\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \cdots = \Sigma\varepsilon^2 = \text{Minimo}.$$

Ora l'analisi c'insegna che tal condizione è espressa dall'equazione

$$\frac{d(\Sigma\varepsilon^2)}{dx}dx + \frac{d(\Sigma\varepsilon^2)}{dy}dy + \frac{d(\Sigma\varepsilon^2)}{dz}dz = 0 :$$

ed essendo le x, y, z indipendenti tra di loro, avremo le equazioni

$$\frac{d\Sigma\varepsilon^2}{dx} = 0 \quad , \quad \frac{d\Sigma\varepsilon^2}{dy} = 0 \quad , \quad \frac{d\Sigma\varepsilon^2}{dz} = 0 \quad ,$$

ossia

$$\frac{d(ax + by + cz + \cdots m)^2}{dx} + \frac{d(a'x + b'y + c'z + \cdots m)}{dx} + \cdots = 0$$

il che porta

$$(a^2x + aby + acz + \cdots\cdots + am) + (a'^2x + a'b'y + a'c'z + \cdots a'm) + \cdots = 0,$$

che per brevità si scriverà

$$x\Sigma[a^2] + y\Sigma[ab] + z\Sigma[ac] + \cdots + \Sigma[am] = 0,$$

similmente per y si avrà

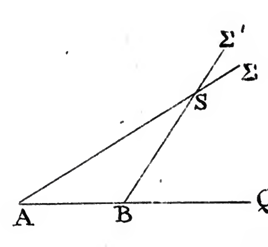
$$x\Sigma[ab] + y\Sigma[b^2] + z\Sigma[bc] + \cdots + \Sigma[bm] = 0,$$

e finalmente per la z

$$x\Sigma[ac] + y\Sigma[bc] + z\Sigma[c^2] + \cdots + \Sigma[cm] = 0;$$

le quali tre equazioni risolute coi soliti metodi elementari da ranno x, y, z, che sono i tre valori cercati.

Il sole ha pure un moto traslatorio suo proprio nello spazio tra le stelle. Ciò si rileva da ciò che le stelle non sono assolutamente fisse, ma hanno piccoli moti di traslazione nello spazio: questo moto può esser particolare della stella per un suo spostamento reale, ma può essere anche semplicemente apparente dovuto alla traslazione del sole, e prodotto da una parallasse di ordine superiore.



Sia S la stella: mentre il sole sta in A essa si vedrà in Σ, e si vedrà in Σ' quando esso sarà passato in B, ed avremo

$$AB : AS = \sin A\hat{S}B : \sin SAB,$$

$$a : R = \sin \pi : \sin z ,$$

ossia

$$\sin \pi = \frac{a}{R} \sin z .$$

Siccome nulla sappiamo rapporto ad a ed R, così ci è impossibile di conoscere direttamente se il moto apparente della stella sia peculiare o parallattico, e così il problema non può risolversi che secondo le leggi della probabilità. A tale effetto cerchiamo quali debbono essere le componenti del moto parallattico di una stella in ascension retta e declinazione, qualora il Sole si muova verso un certo apice di traslazione Q, le cui coordinate in cielo siano A e D.

Per ciò siano x, y, z le coordinate di una stella in una prima posizione, e X, Y, Z le coordinate del Sole percorse in m anni nei quali esso ha descritto uno spazio a; avremo

$$X = a \cos A \cos D,$$

$$Y = a \sin A \cos D,$$

$$Z = \sin D,$$

e le coordinate della stella saranno diventate

$$x' = x - X,$$

$$y' = y - Y,$$

$$z' = z - Z;$$

mettendo i soliti valori delle coordinate, avremo le tre equazioni seguenti

$$R' \cos\alpha' \cos\delta' = R \cos\alpha \cos\delta - a \cos A \cos D,$$

$$R' \sin\alpha' \cos\delta' = R \sin\alpha \cos\delta - a \sin A \cos D,$$

$$R' \sin\delta' = R \sin\delta - a \sin D,$$

trattando queste formole come si è fatto quelle dell'aberrazione, si caverà

$$\frac{R}{R'} = 1 + \frac{a}{R}\left(\cos D \cos \delta \cos (A-\alpha) + \sin D \sin \delta\right),$$

$$(\alpha' - \alpha) \cos \delta = \frac{a}{R} \cos D \sin (a - A),$$

$$(\delta' - \delta) = \frac{a}{R}\left(\sin D \cos \delta - \cos D \sin \delta \cos (\alpha - A)\right).$$

Dividendo l'ultima per la seconda, e ponendo per le differenze $\Delta\alpha$ *e* $\Delta\delta$, *e svolgendo i coseni binomii, avremo*

$$\cot D \cos A \left(\Delta\delta \sin\alpha - \Delta\alpha \cos\alpha \sin\delta \cos\delta\right)$$

$$- \cot D \sin A \left(\Delta\delta \cos\alpha + \Delta\alpha \sin\alpha \cos\delta \sin\delta\right)$$

$$+ \Delta\alpha \cos^2\delta = 0 :$$

dove fatti

$$\cot D \cos A = x \quad , \quad \cot D \sin A = y \; ,$$

l'equazione resta della forma

$$Mx + Ny = P \; ,$$

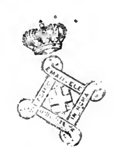
delle quali se ne avrà una per ciascuna stella, e i valori più probabili di x, y, *ossia* A, D *si avranno col metodo de' minimi quadrati. Essi risultano*

$$A = 259° \pm 3 \; ,$$

$$D = 35°.N \pm 5 \, .$$

Cioè il Sole pare trasportarsi verso la costellazione di Ercole; ed esso veduto da una stella di prima grandezza avrebbe un moto proprio di 3".5 in Æ e 0".8 in declinazione.

F I N E



Roma 16 Luglio 1862. — *P. Manganelli scrisse.*

